MOVIMIENTOS VIBRATORIOS. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE.

Contenidos:

---

1) Movimiento periódico. Movimiento oscilatorio. Movimiento vibratorio.

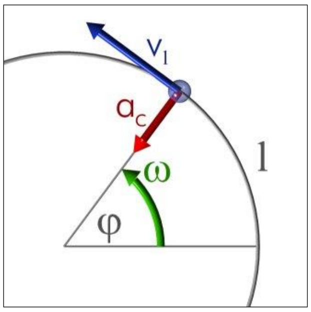
① Definiciones iniciales.

1) *Movimiento periódico*, es aquel que se repite a intervalos iguales de tiempo. Ejemplos:
- Movimientos circulares uniformes, como el de la punta de la aguja de un reloj.
- Movimiento de un péndulo.
- Movimiento de vibración de la membrana de un tambor.

2) Movimiento oscilatorio o vibratorio, es aquel que tiene lugar a un lado y a otro de una posición de equilibrio estable. Es un tipo de movimiento periódico. Ejemplos:
- Movimiento de un péndulo.
- Movimiento de vibración de la membrana de un tambor.

Estas definiciones son simples, no se ha distinguido entre movimiento vibratorio y oscilatorio. Hay que profundizar en ellas.

② Recordatorio de las magnitudes características del movimiento circular.



- Espacio angular, φ, es el ángulo abarcado en el movimiento. Se mide en radianes.

- Espacio lineal, l ó s, es el espacio recorrido sobre la trayectoria. Se mide en metros y se puede calcular con la expresión

$$s = \varphi \cdot R$$

donde R es el radio del movimiento.

- Velocidad angular, ω, es el ángulo recorrido (espacio angular) en la unidad de tiempo. Se mide en radianes/segundo (rad/s)

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

- Velocidad lineal, v, es la distancia recorrida por la partícula en la unidad de tiempo. Se mide en m/s y puede determinar con la expresión

$$v = \omega \cdot R$$

- Aceleración, *a*. También llamada aceleración normal o centrípeta, a_c. En el movimiento circular uniforme la velocidad siempre tiene el mismo módulo, pero, como se ve en la figura, su dirección y sentido cambian. Por tanto, el cuerpo tiene una aceleración que se denomina centrípeta pues la dirección del vector va en la línea que une la partícula con el centro y su sentido es desde la partícula hasta en centro de giro. Su módulo, que se mide en m/s^2, se puede calcular con la expresión

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

- Periodo, *T*, es el tiempo que se tarda en repetir el movimiento. Se mide en segundos.

- Frecuencia, *f*, es el número de vueltas que realiza el móvil en la unidad de tiempo. Se mide en s^{-1}, unidad que se suele llamar Hertzio, Hz.

③ Definición de *movimiento periódico*.

Si se analiza el movimiento circular se observa que cada vez que el punto móvil ha dado un giro completo se repite e valor de tres variables:

- posición del móvil ($\vec{r}$)
- velocidad del móvil ($\vec{v}$)
- aceleración normal o aceleración centrípeta del móvil ($\overrightarrow{a_c}$)

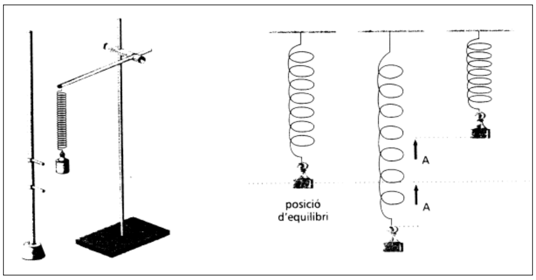
Estas tres variables son vectores. Si nos fijamos detalladamente veremos que lo que va variando de $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{a_c}$ es su dirección y sentido, pero sus módulos no cambian. Por tanto, en otro punto cualquiera de la trayectoria circular el módulo de estas variables no ha cambiado pero sí su dirección y su sentido.

Por tanto, un cuerpo o una partícula describen un *movimiento periódico* cuando las variables posición, velocidad y aceleración de su movimiento toman los mismos valores después de un tiempo constante denominado periodo.

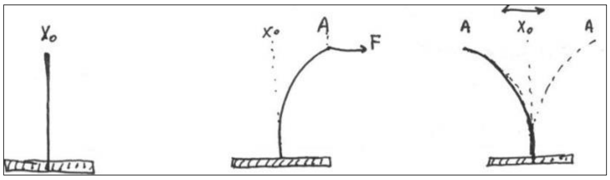
④ Definición de *movimiento oscilatorio y vibratorio*.

No todos los movimientos periódicos son circulares, veamos tres ejemplos de movimientos periódicos no circulares:

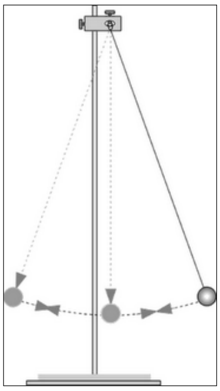
- Una masa cuelga de un muelle en equilibrio, es desplazada respecto de esta posición de equilibrio y soltada. Se produce un movimiento periódico, de amplitud A, en torno a una posición.



- Un alambre vertical fijado por uno de sus extremos al suelo. El otro extremo es desplazado respecto de su posición de equilibrio y soltado. Ocurre lo mismo que en el caso anterior,



- Un péndulo simple puesto en movimiento.



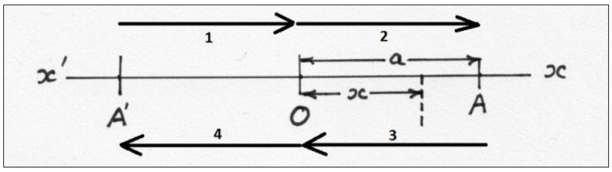
Estos movimientos periódicos se suelen denominar *vibratorios u oscilatorios*. Como vemos, en ellos se desplaza un cuerpo o una partícula sucesivamente de un lado a otro de la posición de equilibrio, repitiendo a intervalos de tiempo regulares sus variables cinemáticas (posición, velocidad y aceleración).

Diferencias entre movimientos oscilatorios y movimientos vibratorios: los movimientos oscilatorios son relativamente lentos (péndulo, muelle colgando, etc.). Cuando las oscilaciones son muy rápidas se denominan vibraciones y el movimiento correspondiente es un movimiento vibratorio (el ejemplo anterior del alambre correspondería a este caso).

⑤ Más definiciones y observaciones.

En los ejemplos anteriores se ha mencionado la *amplitud*, *A*: es el máximo desplazamiento que tiene lugar durante una oscilación o vibración. Dicho desplazamiento se realiza en un tiempo $t = T/4$.

Durante una vibración completa de una partícula la distancia recorrida es de cuatro veces la amplitud. En efecto, si una vibración parte desde la posición A’, alejada de la posición de equilibrio una distancia igual a la amplitud del movimiento,



la oscilación completa se produce en las etapas 1-2-3-4, con un recorrido igual a cuatro veces la amplitud (que en la figura se representa como *a*).

Se observa que el periodo de oscilación no depende de la amplitud de las oscilaciones, es decir, las oscilaciones son isócronas.

2) Movimiento armónico simple. Cinemática.

Este punto tiene 9 apartados (2.1 a 2.9)

2.1.- Las siglas m.a.s. hacen referencia a:

m = movimiento, por tanto, habrá ha que hacer un estudio cinemático.

a = armónico, quiere decir que se la ecuación del movimiento se expresa mediante funciones armónicas, como la función seno o la función coseno.

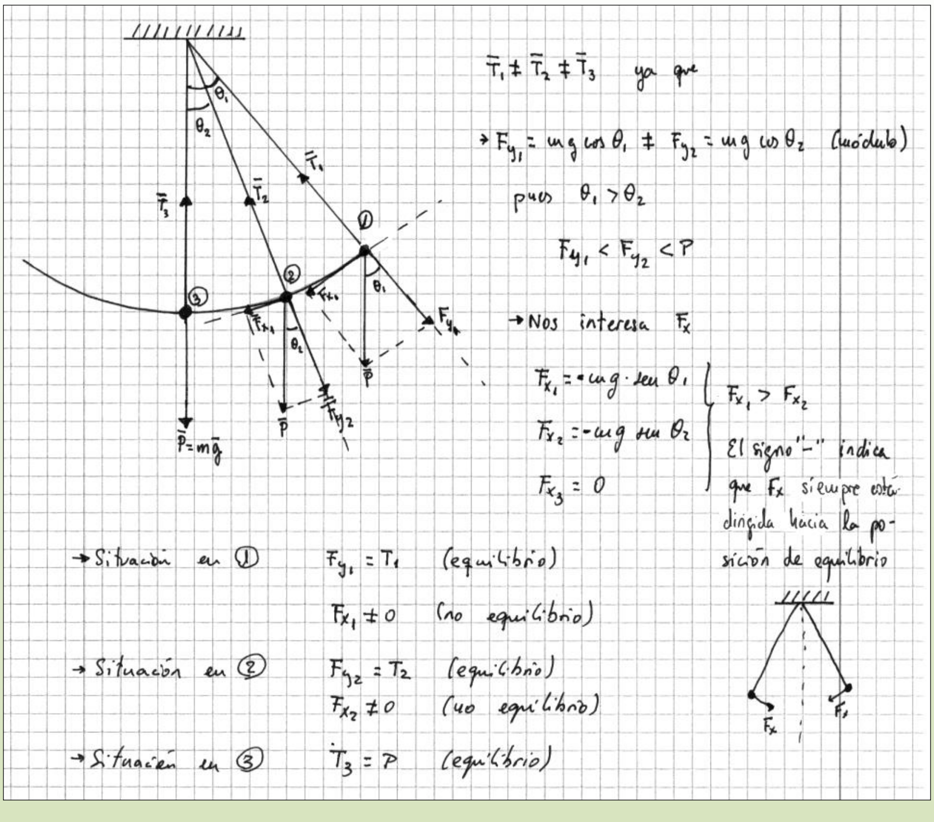
s = simple, es un movimiento de una sola variable (unidimensional).

2.2.- Causa que produce un m.a.s.

Los movimientos vibratorios son producidos por fuerzas que en todo momento son directamente proporcionales al desplazamiento respecto de la posición de equilibrio de la partícula que vibra. Estas fuerzas siembre van dirigidas hacia la posición de equilibrio estable.

AMPLIACIÓN. Análisis de las características de la fuerza que da lugar a un movimiento oscilatorio o vibratorio.

Vamos a caracterizar la fuerza que actúa en un péndulo simple para comprobar que estas características también se cumplen en el caso de la masa que vibra solidariamente con un muelle. En la figura se representa un péndulo simple en tres posiciones concretas, así como las fuerzas involucradas en cada caso. También se analiza el valor de estas fuerzas.



La fuerza que no se equilibra, F_x, es la responsable del movimiento de la masa del péndulo, "tirando" de ésta hacia la posición de equilibrio y acelerándola cuando se mueve desde la posición 1 a la 3 y…

…decelerándola cuando la masa se mueve de la posición 3 a la 1. Esta es la fuerza que hay que analizar:

1) Es una fuerza periódica, es decir, su valor en módulo dirección y sentido se repite una vez transcurrido un cierto tiempo.

2) Es una fuerza que es directamente proporcional a la amplitud del movimiento. En este caso esta proporcionalidad está establecida a través del sen θ.

3) Su dirección es siempre la del desplazamiento y su sentido siempre va dirigido hacia la posición de equilibrio, motivo por el cual se le suele llamar fuerza recuperadora.

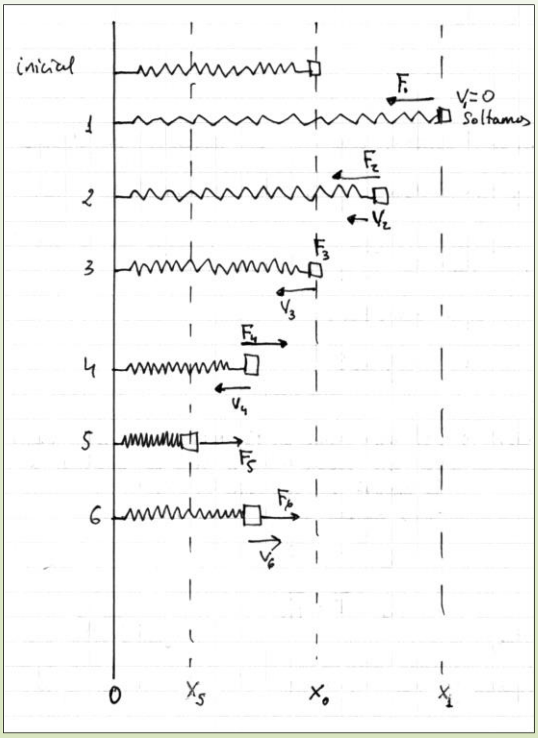
¿Ocurrirá lo mismo en el caso del muelle?

Para simplificar pondremos el muelle horizontal y despreciaremos rozamiento de la masa con el suelo. La ley que rige el muelle es la ley de Hooke que podemos expresar de la siguiente manera:

$$F = -K \cdot \Delta x$$

donde:

- *K* es la constante recuperadora del muelle. Es característica de cada muelle, es decir, depende de la naturaleza de éste y sus unidades son $N \cdot m^{-1}$ en el S.I.
- *Δx* es el alargamiento del muelle desde su posición de equilibrio.
- El signo "-" tiene el mismo sentido que el expresado en el caso del péndulo, es decir, hace que la fuerza elástica siempre vaya dirigida hacia la posición de equilibrio, tanto si el alargamiento es positivo (estiramiento) como si es negativo (compresión).



En la figura adjunta se han representado hasta seis situaciones diferentes. En cada caso:

$F_1 = -k(x_1-x_0)$	$v_1 = 0$
$F_2 = -k(x_2-x_0)$	$v_2 \neq 0$ (acelera)
$F_3 = 0$	$v_3 = max.$
$F_4 = -k(x_4-x_0)$	$v_4 \neq 0$ (decelera)
$F_5 = -k(x_5-x_0)$	$v_5 = 0$
$F_6 = -k(x_6-x_0)$	$v_6 \neq 0$ (acelera)

- Hasta la posición 5 se analiza medio periodo.
- En la posición 4, aunque la fuerza va dirigida hacia el centro, la inercia lleva la masa hasta 5.

Veamos las características de la fuerza recuperadora y si coinciden con las establecidas para el péndulo:

1) Es claro que F5 = F1 (en módulo) y que, por tanto, es una fuerza periódica. Cuando el cuerpo llegue de nuevo a la posición 1 el valor de F volverá a ser el mismo, en este caso en módulo, dirección y sentido.

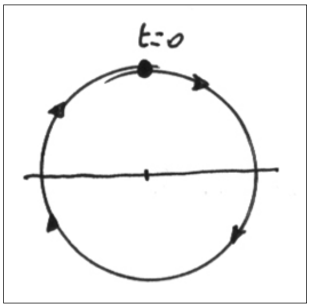
2) Es claro que F5 = F1 ≠ F2 = F4 ≠ F3 (en módulo), luego es una fuerza variable que, además, depende del desplazamiento según la ley de Hooke.

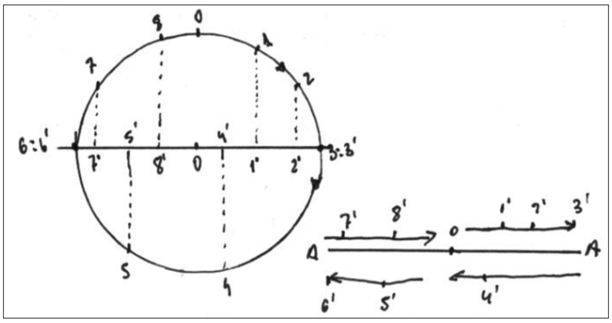
3) En el esquema se ve que F siempre va dirigida hacia la posición de equilibrio.

<u>Conclusión:</u> Una fuerza variable, cuya variación sea proporcional al desplazamiento, y cuyo sentido sea siempre hacia su punto de equilibrio, produce un movimiento armónico simple (m.a.s.).

2.3.- Ecuación del m.a.s. (exposición en 7 pasos, a, b, c, d, e, f y g)

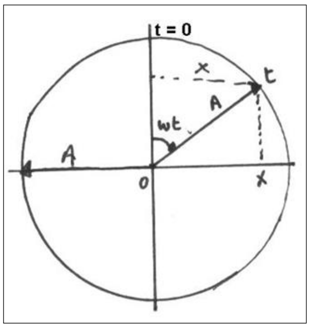
a) Se partirá del movimiento circular uniforme. Supongamos un móvil que se encuentra en la posición marcada en la figura para t = 0. Las proyecciones de las posiciones del móvil en movimiento circular uniforme sobre el diámetro horizontal vienen representadas en la figura.





Como se puede ver, el m.a.s. de trayectoria recta se puede considerar como resultado de la proyección sobre un diámetro de un movimiento circular uniforme (en este ejemplo se ha elegido la proyección sobre el diámetro horizontal, pero se puede elegir cualquier diámetro).

b) Se analizará ahora con detalle una posición cualquiera:



- En el movimiento circular el arco (en radianes) recorrido en el tiempo t será

$$\varphi = \omega t$$

- En la proyección del movimiento, es decir, en el m.a.s., durante ese tiempo el móvil ha pasado desde el origen o posición de equilibrio, *0*, hasta *x*.

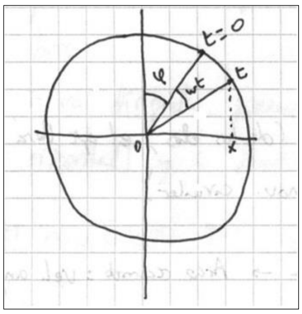
- Se puede ver en la figura que

$$\text{sen}\,\omega t = \frac{x}{A}$$

Por tanto

$$x = A\,\text{sen}\,\omega t$$

La ecuación obtenida es la ecuación de un m.a.s.



c) Una forma más general de la ecuación debería tener en cuenta que en el instante inicial, cuando empezamos a contar, la partícula no tiene porqué estar en la posición x = 0. Para tener en cuenta que pueda estar en cualquier posición arbitraria, la ecuación del m.a.s. debería ser:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

ya que $\omega t + \varphi$ es el ángulo total desde x = 0.

d) Si el movimiento circular se hubiese proyectado sobre la diagonal vertical en lugar de la diagonal horizontal, la ecuación obtenida habría sido:

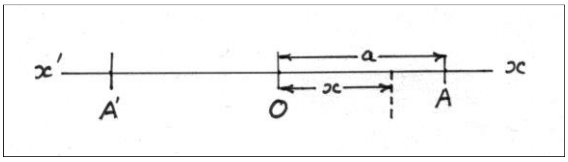
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Como $\cos\alpha = \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, entonces

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = \; x = A\,\text{sen}\left(\omega t + \varphi \; + \frac{\pi}{2}\right)$$

es decir, ambas expresiones son equivalentes pero desfasadas un cuarto de periodo.

e) Significado físico de las magnitudes que aparecen en la ecuación del m.a.s.



$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

- x es la elongación (en metros), es la posición de la partícula vibrante en cualquier instante referida a la posición de equilibrio.

- A es la amplitud (en metros), es el valor máximo que puede tener la elongación.

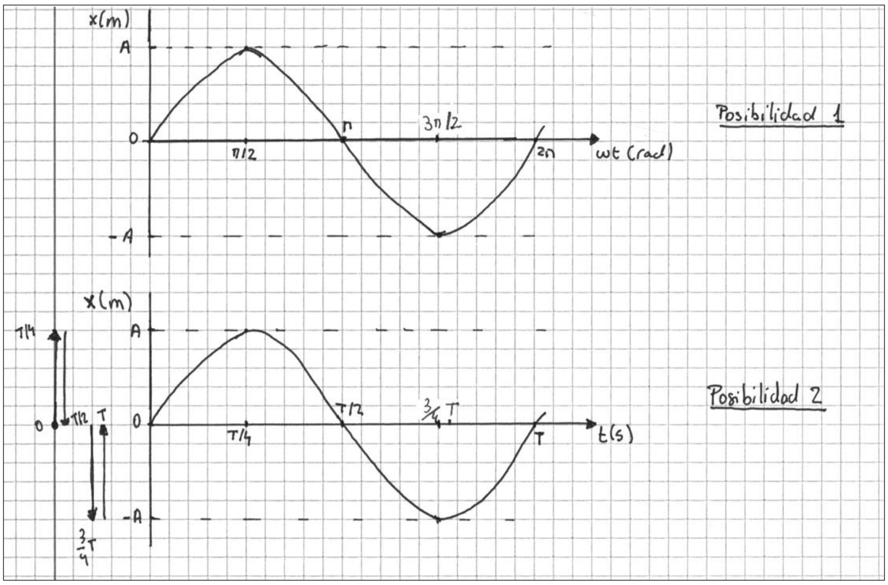
- (ωt + φ) es la fase en cualquier instante (en radianes). Su valor determina el estado de vibración o fase del movimiento.

- φ es la fase inicial o, también, corrección de fase o constante de fase (en radianes). Determina el estado de vibración para t = 0.

- ω es la pulsación o frecuencia angular (en rad/s). Representa la velocidad angular constante del hipotético movimiento circular asociado.

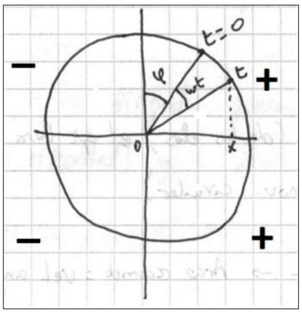
f) Representación gráfica de la ecuación del m.a.s.

En las figuras siguientes, se ofrecen dos posibilidades de representación de la ecuación del m.a.s. cuando la fase inicial es cero.



Se pueden comparar estas gráficas con la primera figura de la página 6 que muestra las posiciones de la partícula vibrante en cada instante.

g) Valores positivos y negativos de la elongación. Es importante tener en cuenta que la función seno puede tomar valores positivos y negativos que harán que la elongación sea positiva o negativa. El sentido que hay que darle a este signo está relacionado con el lugar en el que se encuentra la partícula vibrante. Así, para la situación de partida tomada en estos apuntes,



- Si la elongación es positiva la partícula se encuentra a la izquierda de la posición de equilibrio. Podremos saber si se acerca o se aleja a dicha posición dependiendo del valor de la fase. Así, si la fase está entre 0 y $^{\pi}/_{2}$ radianes la partícula se aleja, y si está entre $^{\pi}/_{2}$ y π la partícula se acerca.

- Si la elongación es negativa la partícula se encuentra a la derecha de la posición de equilibrio. Podremos saber si se acerca o se aleja a dicha posición dependiendo del valor de la fase. Así, si la fase está entre π y $^{3\pi}/_{2}$ radianes la partícula se aleja, y si está entre $^{3\pi}/_{2}$ y 2π la partícula se acerca.

Hay que tener en cuenta que en la proyección horizontal del movimiento circular el ángulo empieza a contar desde el eje OY hacia el eje OX.

2.4.- Otras magnitudes del m.a.s.

Periodo, T, es el tiempo necesario para dar una oscilación completa, su expresión se puede deducir de la expresión de la frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frecuencia, f, es la inversa del periodo,

$$f = \frac{1}{T}$$

Su unidad será s^{-1}, también llamada Hertzio (Hz), ciclos por segundo o vibraciones por segundo.

2.5.- Dos problemas resueltos.

---

① Una partícula animada de m.a.s. inicia el movimiento en el extremo positivo de su trayectoria y tarda 0,25 s en llegar al centro de la misma. La distancia entre ambas posiciones es de 10 cm. Calcula:

a) El periodo y la frecuencia del movimiento.

b) El número de vibraciones que realiza en un minuto

c) La ecuación del movimiento

d) La posición de la partícula 0,5 s después de iniciado el movimiento

---

Datos:

- Cuando t = 0, x = A
- Tiempo en hacer ¼ del movimiento = 0,25 s
- A = 10 cm = 0,1 m

a) Si el tiempo que nos dan es el empleado en recorrer la distancia que va desde un extremo hasta la posición de equilibrio, entonces, este tiempo se corresponde con ¼ del periodo total. Así,

$$T = 4 \cdot 0{,}25 = 1\ s$$

Por otra parte, la frecuencia, *f*, será,

$$f = \frac{1}{T} = 1\ Hz$$

b) El significado físico de la frecuencia es el número de vibraciones (ciclos) que realiza el cuerpo en un segundo. Si nos piden el número de vibraciones que se realiza en un minuto, entonces:

$$n^{\underline{o}}\ vibraciones\ en\ 60\ segundos = 60 \cdot f = 60$$

c) La ecuación general del m.a.s. es

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Para establecerla en este movimiento debemos conocer las llamadas constantes del movimiento, A, ω y φ. El valor de la amplitud es dato del problema. En cuanto a la frecuencia angular o pulsación,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1 = 2\pi\ rad/s$$

Nos falta conocer la fase inicial. Para ello debemos saber con exactitud una posición de la partícula en un tiempo determinado. En este caso sabemos que cuando t=0 la partícula se encuentra en x=A. Sustituyendo estos datos en la ecuación del m.a.s.,

$$A = A \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 0 + \varphi)$$

$$1 = \text{sen}\ \varphi$$

$$\varphi = \text{arcsen}\ 1 = {}^{\pi}/_{2}\ rad$$

En definitiva,

$$x = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

d) Cuando t = 0,5 s, la posición de la partícula será:

$$x = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 0{,}5 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1\ \text{sen}\ \left(\frac{3\pi}{2}\right) = -0{,}1\ m$$

La partícula se encuentra en el extremo opuesto al que estaba al iniciar el movimiento.

② Una partícula se mueve con un m.a.s. entre dos puntos distantes entre sí 20,0 cm y realiza 4 vibraciones en un segundo. Si la partícula en el instante inicial se encuentra en la posición x = A/2 y se dirige hacia el extremo positivo, calcula:

a) La ecuación del movimiento.

b) ¿En qué instante pasa por primera vez por la posición de equilibrio?

c) ¿En qué instante alcanzará por primera vez el valor máximo de x?

Datos:

- La distancia entre los extremos de vibración es 20 cm, por tanto, A = 10 cm = 0,1 m
- 4 vibraciones por segundo, es decir, f = 4 Hz
- Si t = 0, entonces x = A/2 (hacia el extremo positivo)

a) La ecuación del m.a.s. en general es,

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Sabemos el valor de A. En cuanto al valor de la pulsación,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \, rad/s$$

Para conocer la fase inicial, aplicamos en la ecuación las condiciones del instante inicial

$$A/2 = A \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 0 + \varphi)$$

$$1/2 = \text{sen}\,\varphi$$

$$\varphi = \text{arcsen}\, 0{,}5 = \frac{\pi}{6}\, rad$$

Por tanto,

$$x = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Aclaración: si el problema hubiera mencionado que en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición x = A/2 y se mueve hacia el punto de equilibrio, entonces el procedimiento sería el mismo, pero fase inicial ya no sería π/6 (30º) sino que sería el ángulo cuyo seno sea también 0,5, es decir, 5π/6 (150º).

b) En la posición de equilibrio, x = 0. Debemos resolver la siguiente ecuación:

$$0 = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Es decir, la fase del movimiento debe ser tal que la función seno sea cero. Es decir

$$8\pi t + \frac{\pi}{6} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots.$$

De todas estas soluciones posibles sólo una es la que corresponde al primer paso por la posición de equilibrio. La primera de ellas no es válida pues la partícula inicia el movimiento con una fase inicial, por tanto, es la segunda posibilidad,

$$8\pi t + \frac{\pi}{6} = \pi; \quad 8t + \frac{1}{6} = 1; \quad t = 0{,}1\, s$$

Aclaración: si hubiéramos utilizado el valor 2π, habríamos calculado el tiempo que tarda en pasar la segunda vez por la posición de equilibrio, 3π para la tercera vez,….

c) El valor máximo de x se dará cuando x = A = 0,1 m. Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior, debemos resolver la siguiente ecuación:

$$0{,}1 = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right); \quad 1 = \text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$8\pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}; \quad 8t + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}; \quad t = 0{,}042\, s$$

2.6.- Velocidad del m.a.s.

Recordatorio.
- Si $y = \text{sen}(ax)$, entonces $y' = \frac{dy}{dx} = a \cdot \cos(ax)$
- Si $y = cos(ax)$, entonces $y' = \frac{dy}{dx} = -a \cdot \text{sen}(ax)$

Si partimos de la ecuación de posición del m.a.s.

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

la velocidad de la partícula en cualquier instante vendrá dada por,

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Por tanto,

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Expresión que permite calcular la velocidad de la partícula que realiza el m.a.s. en cualquier instante.

2.7.- Aceleración del m.a.s.

Si partimos de la ecuación de velocidad del m.a.s.

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

La aceleración de la partícula en cualquier instante vendrá dada por,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Por tanto,

$$a = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

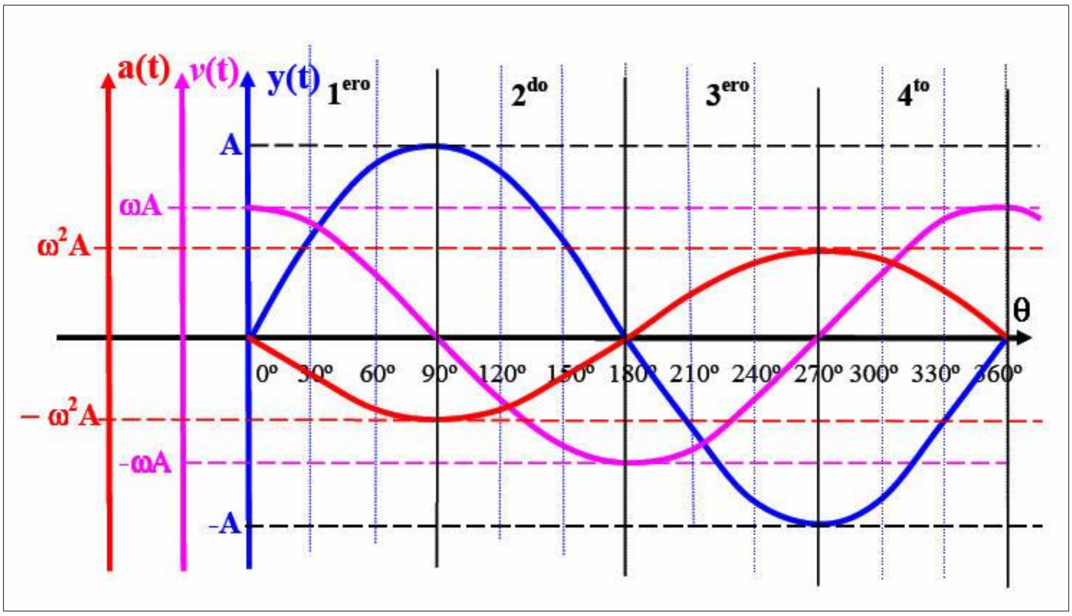
Expresión que permite calcular la velocidad de la partícula que realiza el m.a.s. en cualquier instante. Teniendo en cuenta la expresión de la ecuación de posición, la aceleración también se puede escribir

$$a = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

2.8.- Situaciones extremas y de equilibrio

En la figura de la página siguiente se comparan las gráficas de posición, velocidad y aceleración. Para ello se han representado las tres ecuaciones correspondientes suponiendo que φ = 0, es decir,

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega t) \qquad v = A\omega \cdot \cos(\omega t) \qquad a = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t)$$



El eje de ordenadas es diferente para cada ecuación, mientras que el eje de abscisas es el mismo en los tres casos y representa la fase del movimiento que, en esta ocasión, se ha representado en grados.

De la observación de estas gráficas podemos concluir que:

- Cuando la partícula se encuentra en la posición de equilibrio, es decir la elongación es cero, entonces la velocidad de dicha partícula es máxima y su aceleración cero.

Si $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \ldots,$ entonces $x = 0$, $v = \pm A\omega =$ máx. y $a = 0$

El signo $\pm$ en la expresión indica el sentido del movimiento cuando pasa por la posición de equilibrio. En un m.a.s. horizontal si el signo es positivo se dirige hacia la derecha; si es negativo se dirige hacia la izquierda.

- Cuando la partícula se encuentra en los puntos de máxima elongación, entonces la velocidad de la misma es cero y su aceleración también es máxima.

Si $\omega t = \pi/2, \; 3\pi/2, \ldots,$ entonces $x = \pm A$, $v = 0$ y $a = \pm\omega^2 A =$ máx.

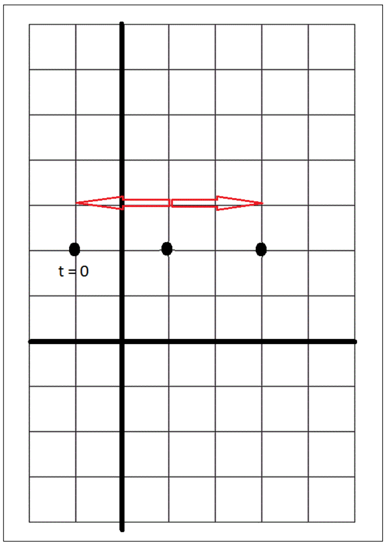
Por tanto,

Fase, ωt ($\varphi = 0$)	Elongación, x	Velocidad, v	Aceleración, a
0	Punto de equilibrio, $x = 0$	Máxima, $v = A\omega$	$a = 0$
$\pi/2$	$x = A$	$v = 0$	Máxima, $a = -A\omega^2$
π	Punto de equilibrio, $x = 0$	Máxima, $v = -A\omega$	$a = 0$
$3\pi/2$	$x = -A$	$v = 0$	Máxima, $a = A\omega^2$

2.9.- Tres problemas resueltos

① Un móvil describe un m.a.s., siendo los puntos extremos de su trayectoria el P_1 (-1,2) y P_2 (3,2), coordenadas expresadas en metros. Sabiendo que inicialmente se encuentra en P_1 y que su aceleración viene dada en todo momento por la expresión: $a = -\pi^2 \cdot x$ (SI), determinar:

a) Ecuación de la elongación en función del tiempo.
b) Posición del móvil al cabo de 1 segundo.
c) Ecuación de la velocidad en función del tiempo.
d) Velocidad del móvil al cabo de 1,5 segundos.



Datos

$a = -\pi^2 \cdot x$

Extremos de la trayectoria: P_1 (-1,2) y P_2 (3,2)

Si t=0, la partícula está en P_1

a) De acuerdo con la ecuación de aceleración del m.a.s.,

$$a = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

Podemos afirmar, identificando, que

$$\omega = \pi \ rad/s$$

Por otra parte, en la representación se puede ver que dadas las coordenadas de los puntos extremos de vibración, la amplitud tiene un valor

$$A = 2\,m$$

En cuanto a la fase inicial, sabemos la posición de la partícula en el instante inicial ($x = -A$). Sustituyendo en la ecuación de la elongación,

$$-A = A \cdot \text{sen}(\pi \cdot 0 + \varphi)$$

$$-1 = \text{sen}\,\varphi$$

$$\varphi = arcsen(-1) = \frac{3\pi}{2}\ rad, \ \ o\ también, \ \ \varphi = -\frac{\pi}{2}\ rad$$

Por tanto,

$$x = 2 \cdot \text{sen}\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

b) La posición cuando ha pasado un segundo será,

$$x_1 = 2 \cdot \text{sen}\left(\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = 2\text{ m}$$

Es decir, la partícula se encuentra en el punto de máxima elongación positivo (+A)

c) La ecuación de velocidad de este movimiento es

$$v = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cdot \cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

d) La velocidad cuando t = 1,5 s será,

$$v_{1,5} = 2\pi \cdot \cos\left(\pi \cdot 1{,}5 + \frac{3\pi}{2}\right) = -2\pi \ \ m/s$$

Esta es la velocidad máxima que corresponde al paso de la partícula por la posición de equilibrio cuando se dirige hacia el extremo P_1.

② Un oscilador vibra de forma que para t=0 se encuentra a 4 cm de la posición de equilibrio con una velocidad v_0 = 87 cm/s. Si la frecuencia del movimiento es de 2 Hz, calcula: a) La fase inicial y la amplitud del movimiento; b) La elongación y la velocidad en el instante t = 0,5 s; c) El valor máximo de la velocidad.

Datos

- Si t = 0, x_0 = 4 cm = 0,04 m y v_0 = 87 cm/s = 0,87 m/s
- f = 2 Hz; $\omega = 2\pi f = 4\pi$ *rad/s*

a) FORMA 1.

Vamos a sustituir las condiciones iniciales en las ecuaciones correspondientes:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi); \quad 0{,}04 = A\,\text{sen}\,(4\pi \cdot 0 + \varphi); \quad 0{,}04 = A\,\text{sen}\,\varphi$$

$$v = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi); \quad 0{,}87 = 4\pi\,A\cos(4\pi \cdot 0 + \varphi); \quad 0{,}87 = 4\pi\,A\cos\varphi$$

Tenemos pues un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Para resolverlo podemos dividir ambas ecuaciones:

$$\frac{0{,}04}{0{,}87} = \frac{A\,\text{sen}\,\varphi}{4\pi\,A\cos\varphi}; \quad 0{,}046 = \frac{1}{4\pi}\,\text{tg}\,\varphi; \quad \text{tg}\,\varphi = 0{,}577$$

$$\varphi = \arctan 0{,}577 = 30° = \frac{\pi}{6}\,rad$$

En cuanto a la amplitud, sustituyendo en una de las ecuaciones, por ejemplo, en la ecuación de la elongación,

$$A = \frac{0{,}04}{\text{sen}\;\pi/6} = 0{,}08\,m$$

FORMA 2.

Implica en conocimiento de una nueva expresión:

$$v = \pm\,\omega\,\sqrt{A^2 - x^2}$$

Veremos aquí su deducción:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$
$$v = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

Si

$$\text{sen}^2\,\text{a} + \cos^2\text{a} = 1; \quad \cos\text{a} = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\,\text{a}}$$

en nuestro caso, $a = \omega t + \varphi$, luego

$$v = \pm\,A\omega\,\sqrt{1 - \text{sen}^2\,(\omega t + \varphi)} = \pm\,\omega\sqrt{\text{A}^2[1 - \text{sen}^2\,(\omega t + \varphi)]}$$

$$v \pm\,\omega\sqrt{\text{A}^2 - \text{A}^2\text{sen}^2\,(\omega t + \varphi)]}$$

$$v = \pm\,\omega\,\sqrt{A^2 - x^2}$$

Conociendo esta expresión, con los datos que el problema ofrece se puede calcular en primer lugar la amplitud. Despejando en primer lugar obtenemos,

$$A = \pm\sqrt{\frac{v^2}{\omega^2} + x^2}$$

De donde

$$A = \pm\sqrt{\frac{0{,}87^2}{16\pi^2} + 0{,}04^2} = \pm 0{,}08\,m$$

Una vez conocida la amplitud, sustituimos las condiciones iniciales en la ecuación de la elongación para determinar así la fase inicial,

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi); \quad 0{,}04 = 0{,}08\,\text{sen}\,(4\pi \cdot 0 + \varphi); \quad 0{,}5 = \text{sen}\,\varphi$$

De donde se deduce que φ = π/6 rad.

b) Conocidas las constantes del movimiento, se puede determinar la posición y la velocidad de la partícula en cualquier instante. Así, a los 0,5 s

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi) = 0{,}08 \text{ sen } \left(4\pi \cdot 0{,}5 + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}04\ m$$
$$v = A\ \omega \cos(\omega t + \varphi) = 0{,}08 \cdot 4\pi \cos\left(4\pi \cdot 0{,}5 + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}87\ m/s$$

Se puede observar que estos valores coinciden con los valores iniciales, es decir, el movimiento se repite cada 0,5 segundos. Este valor es el periodo del movimiento, como se pude comprobar a partir del dato de la frecuencia,

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ s$$

c) La velocidad máxima del m.a.s. se da cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio, es decir, cuando la fase del movimiento es, en un ciclo completo, 0 o π radianes. Entonces,

$$v_{max} = \pm A\ \omega = 0{,}08 \cdot 4\pi = 1\ m/s$$

---

③ Una partícula de 250 g de masa vibra con m.a.s. de forma que, para t = 0, pasa por la posición de equilibrio en sentido negativo. Si tarda 1 minuto y 40 segundos en dar 125 oscilaciones completas y la distancia recorrida en una oscilación completa es de 6,48 m, calcula: a) Las constantes del movimiento; b) La ecuación del movimiento, expresada en seno y coseno; c) La velocidad y aceleración máximas.

Datos:

- masa que vibra = 250 g (dato innecesario en un problema de cinemática)
- si t = 0, x = 0 (hacia el extremo negativo)
- 125 oscilaciones completas en 1 minuto y 40 segundos, $f = \frac{125}{100} = 1{,}25\ Hz$
- Distancia recorrida en una oscilación, 6,48 m.

a) Las constantes del movimiento son la amplitud, A, la frecuencia angular, ω, y la fase inicial, φ.

En una oscilación completa se recorre una distancia igual a cuatro veces la amplitud, por tanto,

$$A = \frac{6{,}48}{4} = 1{,}62\ m$$

La frecuencia angular es,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1{,}25 = 7{,}85\ rad/s$$

Para calcular la fase inicial, sustituimos los datos de t = 0 en la ecuación de la elongación,

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi); \qquad 0 = A \text{ sen } \varphi$$

Si la partícula inicia el movimiento dirigiéndose hacia el extremo negativo la solución es

$$\varphi = \pi\ \ rad$$

b) Ecuación del movimiento expresada en seno:

$$x = 1{,}62 \text{ sen } (7{,}85t + 3{,}14)$$

Para cambiar entre seno↔coseno, debemos recordar que,

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Por tanto, la ecuación del movimiento expresada en coseno será:

$$x = 1{,}62\cos\left(7{,}85t + \pi - \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}62\ \cos\left(7{,}85t + \frac{\pi}{2}\right)$$

c) La velocidad máxima es

$$v_{max} = \pm A\,\omega = 1{,}62 \cdot 7{,}85 = \pm 12{,}72\ m/s$$

El valor el positivo corresponde al paso de la partícula hacia el extremo positivo y el valor negativo al paso por el mismo lugar en sentido negativo.

$$a_{max} = \pm\,A\,\omega^2 = = \pm\,99{,}82\ m/s^2$$

El valor positivo corresponde al paso de la partícula por el extremo negativo y el valor positivo al paso de la partícula por el extremo positivo.

3) Oscilador armónico.

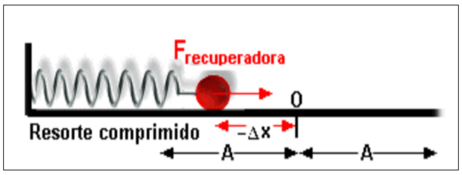
3.1.- Dinámica del m.a.s.

① Consideraciones iniciales:

- Las características de la fuerza recuperadora causante del m.a.s. ya han sido analizadas (pág. 4).

- En el estudio cinemático se ha visto que la partícula acelera cuando se dirige hacia la posición de equilibrio, mientras que su movimiento es retardado cuando se dirige hacia los extremos. Por tanto, la fuerza que se ejerce sobre la partícula que vibra tiene tendencia a llevar a la partícula a la posición de equilibrio (fuerza recuperadora).

② Expresión para la fuerza recuperadora en un resorte horizontal:



Partiendo de la segunda ley de la Dinámica,

$$F = m\,a$$

Teniendo en cuenta la expresión de la aceleración del m.a.s.,

$$F = m\,(-\omega^2\,x)$$

Como la masa, m, y la pulsación, ω, son magnitudes constantes, podemos escribir,

$$F = -\,k\,x$$

Donde,

$$k = m\,\omega^2$$

Vemos pues que la ley de Hooke ($F = -k\,x$), una ley experimental, se puede deducir a partir del principio fundamental de la Dinámica.

③ Observaciones:

A partir de las expresiones anteriores podemos obtener la relación entre la pulsación, el periodo y la masa del cuerpo que vibra:

$$k = m\,\omega^2 \qquad \rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$además \qquad \rightarrow \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El periodo de un oscilador sometido a una fuerza elástica depende sólo de la constante del resorte y de la masa que vibra, pero no depende de la amplitud del movimiento. Por tanto, un mismo resorte tarda el mismo tiempo en hacer oscilaciones con amplitudes diferentes.

④ Dos problemas resueltos.

Cierto resorte tiene sujeto un cuerpo de 2 kg en su extremo libre y se requiere una fuerza de 8 N para mantenerlo a 20 cm del punto de equilibrio. Si el cuerpo realiza un m.a.s. al soltarlo, halla: a) la constante recuperadora del resorte; b) el periodo de su oscilación.

Datos:

- $m = 2$ kg
- $F_{tracción} = 8\ N = F_{recuperadora}$
- $A = 20$ cm $= 0{,}2$ m

a) En el instante en que se suelta el muelle podemos aplicar la ley de Hooke:

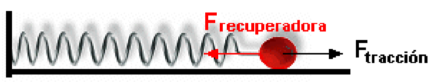
$$F_t = F_e$$

El módulo de la fuerza de tracción es igual al módulo de la fuerza recuperadora, es decir,

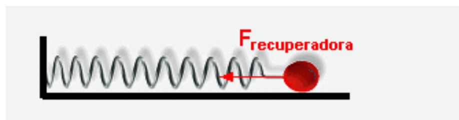
$$F_t = 8 = k \cdot x$$

El alargamiento del muelle (cuando la fuerza de tracción es de 8 N) es de 0,2 m, por tanto,

La situación en el instante inmediato a soltar el cuerpo es:



La situación una vez soltado el muelle, inicio del m.a.s., es:



$$k = \frac{8}{0{,}2} = 40\ N \cdot m^{-1}$$

b) El periodo de vibración de un resorte viene dado por la expresión

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Por tanto,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{40}} = 1{,}4\ s$$

Un cuerpo unido a un resorte horizontal oscila con m.a.s. sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Si se duplica la masa del cuerpo, ¿cómo variarán la pulsación, el periodo, la velocidad máxima y la aceleración máxima?

Datos:

Si la masa del cuerpo que vibra es m, las expresiones necesarias son:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f_1 = \frac{1}{T_1} \qquad v_{max_1} = \pm A\ \omega_1 \qquad a_{max_1} = \pm A\ \omega_1^2$$

Si la masa se duplica, 2m, las expresiones serían:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} \qquad f_2 = \frac{1}{T_2} \qquad v_{max_2} = \pm A\ \omega_2 \qquad a_{max_2} = \pm A\ \omega_2^2$$

Para ver cómo varían cada una de estas magnitudes las dividimos entre sí. Empezando por la pulsación,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\frac{m}{k}}}{\sqrt{\frac{k}{2m}}} = \sqrt{2} \ \rightarrow\ \omega_1 = \sqrt{2}\,\omega_2$$

En cuanto al periodo,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \rightarrow\ T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,T_2$$

La relación entre las frecuencias será inversa a la relación entre los periodos, es decir,

$$f_1 = \sqrt{2}\,f_2$$

En cuanto a la velocidad máxima,

$$\frac{v_{max_1}}{v_{max_2}} = \frac{\pm A\ \omega_1}{\pm A\ \omega_2} = \frac{\sqrt{2}\,\omega_2}{\omega_2} \ \rightarrow\ v_{max_1} = \sqrt{2}\,v_{max_2}$$

Finalmente, la aceleración máxima,

$$\frac{a_{max_1}}{a_{max_2}} = \frac{\pm A\ \omega_1^2}{\pm A\ \omega_2^2} = \frac{2\omega_2^2}{\omega_2^2} \ \rightarrow\ a_{max_1} = 2\,a_{max_2}$$

3.2.- Energía del oscilador armónico

Si el oscilador armónico está en movimiento es claro que debe tener una energía cinética pues es la asociada al movimiento de los cuerpos.

Prescindiendo de la vibración en vertical que también daría lugar a una energía potencial gravitatoria, un oscilador armónico tiene una "Energía potencial elástica" ya que el movimiento armónico es consecuencia de una fuerza conservativa (una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza sobre un objeto en movimiento entre dos puntos es independiente de la trayectoria que el objeto tome entre los puntos. En otras palabras, el trabajo realizado sobre un objeto por una fuerza conservativa depende sólo de las posiciones inicial y final del objeto).

Lo mencionado en los dos párrafos anteriores se puede esquematizar de la siguiente manera:

Movimiento	Armónico	Simple	
Una masa m se mueve con una velocidad variable	Provocado por una fuerza conservativa	Horizontal	Vertical
Tiene energía cinética	Tiene energía potencial elástica		Tiene energía potencial gravitatoria
E_c	$E_{p(e)}$		$E_{p(g)}$
Energía del oscilador = $E_c + E_{p(e)}$ (+ $E_{p(g)}$)			

3.2.1.- Energía cinética del oscilador armónico.

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

Si

$$v = A\, \omega \cos \omega t$$

donde se ha considerado, para simplificar que φ = 0, entonces,

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, A^2\, \omega^2 \cos^2 \omega t$$

Si $\omega^2 = k/m$, entonces,

$$E_c = \frac{1}{2}\, A^2\, k \cos^2 \omega t$$

Como $\cos^2 x + \mathrm{sen}^2\, x = 1$, entonces $\cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2\, x$, luego

$$E_c = \frac{1}{2}\, A^2\, k\, [1 - \mathrm{sen}^2 \omega t] = \frac{1}{2}\, k\, A^2 - \frac{1}{2}\, k\, A^2 \mathrm{sen}^2 \omega t$$

Si $x = A \,\mathrm{sen}\, \omega t$, entonces

$$E_c = \frac{1}{2}\, k\, A^2 - \frac{1}{2}\, k\, x^2 = \frac{1}{2}\, k\, (A^2 - x^2)$$

3.2.2.- Energía potencial elástica.

La energía potencial elástica es el trabajo que hay que realizar para desplazar el resorte una distancia *x*, venciendo la fuerza recuperadora. Este trabajo no se puede calcular a partir de la expresión

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\, d \cos\alpha$$

ya que la fuerza elástica no es constante sino variable.

El procedimiento que se sigue es calcular el trabajo con la expresión anterior pero para un desplazamiento infinitesimal, *dx*. En ese desplazamiento tan pequeño la fuerza elástica se puede considerar constante. A continuación se calcula el trabajo en el siguiente desplazamiento infinitesimal y así sucesivamente hasta cubrir todo el recorrido. El trabajo total será

$$E_{p(e)} = W_T = W_1 + W_2 + W_3 + \ \ldots. + W_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

Cuando el desplazamiento es infinitesimal el símbolo sumatorio se cambia por el de la integral, es decir:

$$E_{p(e)} = W_T = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Como la fuerza elástica se opone a la posición medida desde el punto de equilibrio, el ángulo que forman es de 180º.

$$E_{p(e)} = W_T = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^x -k\, x\, dx \cos\pi = k \int_0^x x\, dx = \left[k\,\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

En definitiva:

$$E_{p(e)} = \frac{1}{2}\, k\, x^2$$

3.2.3.- Energía mecánica.

Sin tener en cuenta energía potencial gravitatoria, por ejemplo, en un resorte horizontal,

$$E_m = E_c + E_{p(e)}$$

$$E_m = \frac{1}{2}\, k\, (A^2 - x^2) + \frac{1}{2}\, k\, x^2 = \frac{1}{2}\, k\, A^2$$

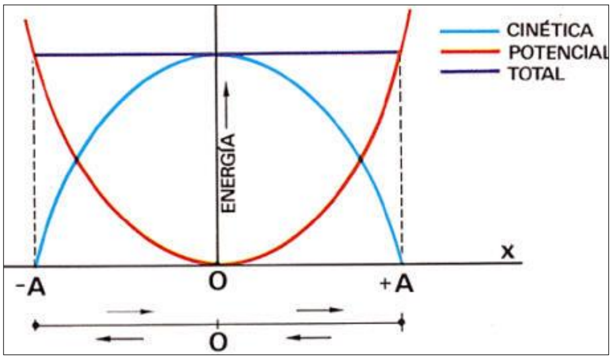
Consideraciones:

1) En un m.a.s. la energía mecánica no depende de la posición de la partícula que vibra. Sólo depende de las características del oscilador (k) y de la amplitud (A).

Obviamente esta consideración es sólo para el oscilador. Si éste está colocado de forma que la gravedad influya, entonces la energía mecánica también tendrá una componente de energía potencial gravitatoria.

2) En ausencia de rozamientos, como ocurre en el m.a.s., la energía mecánica permanece constante.

3) Si representamos gráficamente las variaciones de la energía cinética, potencial y la mecánica, vemos que,



· Podemos ver que la parábola que representa la variación de la energía cinética del oscilador durante una vibración es negativa.

- La energía cinética es máxima cuando la velocidad es máxima, es decir, en el punto de equilibrio.

- La energía cinética es cero cuando el cuerpo vibrante está detenido, es decir, en los extremos de vibración, cuando x = A.

· La parábola que representa la variación de la energía potencial elástica del oscilador durante una vibración es positiva.

- La energía potencial elástica es máxima cuando la elongación es máxima, es decir, en los extremos de vibración.

- La energía potencial elástica es nula cuando la elongación es cero, es decir, en el punto de equilibrio.

· Un oscilador es un sistema conservativo. La energía potencial aumenta a medida que la energía cinética disminuye, y viceversa. Existen dos valores de elongación para los cuales ambas energías son iguales. Se puede demostrar que esto ocurre cuando

$$x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad E_c = E_{p(e)} = \frac{1}{4}\, k\, A^2$$

3.2.4.- Dos problemas resueltos

Disponemos de un muelle que se alarga 5 cm cuando se cuelga de él una masa de 1,0 kg. Colocamos después este muelle unido a una masa de 500 g sobre una mesa horizontal sin rozamiento. La masa se separa 3 cm de su posición de equilibrio y se deja vibrar sobre el eje horizontal. Calcula: a) la constante de recuperación del resorte; b) la energía potencial en el punto de máxima deformación en horizontal; c) La energía cinética cuando x = 2 cm; d) la velocidad de la partícula en el punto mencionado en el apartado anterior.

Datos:

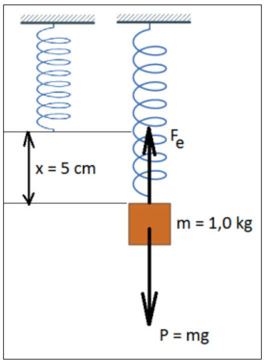
· En vertical:

· x = 5 cm = 0,05 m, cuando se cuelga una masa de 1 kg.

· En Horizontal:

· m = 500 g = 0,5 kg

· A = 3 cm = 0,03 m



a) En la figura adjunta se representa la situación en vertical. En primer lugar el muelle sin estirar, en posición de equilibrio. Luego la situación al colgar una masa de 1 kg, situación también de equilibrio en la que podemos establecer que el peso y la fuerza elástica (recuperadora) son iguales en módulo:

$$P = F_e$$

$$mg = kx$$

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{1 \cdot 9{,}8}{0{,}05} = 196 \ N \cdot m^{-1}$$

b) La máxima deformación se produce cuando x = A. En este punto la energía potencial elástica coincide con la energía mecánica de la partícula vibrante. Por tanto,

$$E_m = E_{p(e)} = \frac{1}{2} k \, x^2 = \frac{1}{2} k \, A^2 = \frac{1}{2} \cdot 196 \cdot 0{,}03^2 = 0{,}088 \, J$$

c) Si la elongación vale 2 cm, la energía cinética será (forma 1):

$$E_c = \frac{1}{2} K \, (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} \cdot 196 \cdot (0{,}03^2 - 0{,}02^2) = 0{,}049 \, J$$

Otra forma puede ser calcular la energía potencial cuando la elongación es de 2 cm y después calcular la energía cinética a partir de la energía mecánica:

$$E_{p(e)} = \frac{1}{2} k \, x^2 = \frac{1}{2} \cdot 196 \cdot 0{,}02^2 = 0{,}039 \, J$$

$$E_m = E_c + E_{p(e)}; \quad E_c = 0{,}088 - 0{,}039 = 0{,}049 \, J$$

d) La velocidad cuando la elongación vale 2 cm se pude calcular rápidamente si se conoce la energía cinética de la partícula en ese punto,

$$E_c = \frac{1}{2} m \, v^2; \quad v = \pm \sqrt{\frac{2 \, E_c}{m}} = \pm \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}049}{0{,}5}} = \pm 0{,}443 \ m \cdot s^{-1}$$

Dos partículas de masas m y m’ (m’ > m) están animadas de m.a.s. de igual amplitud, unidas a resortes de la misma constante k; a) ¿qué partícula tiene mayor energía mecánica? b) ¿Cuál de las dos partículas tiene mayor energía cinética al pasar por la posición de equilibrio? c) ¿Cuál de las dos pasa por la posición de equilibrio a mayor velocidad?

---

a) La expresión de la energía mecánica de un cuerpo con m.a.s. es

$$E_m = \frac{1}{2} k \, A^2$$

Por tanto, la energía mecánica no depende de la masa del cuerpo, sólo depende de la constante recuperadora k y de la amplitud A, magnitudes que, según el enunciado no cambian.

b) Cuando una partícula con m.a.s. pasa por la posición de equilibrio su energía cinética es máxima pues en este punto la velocidad de la partícula es máxima. En este punto la partícula no tiene energía potencial elástica y, por tanto,

$$E_m = E_c$$

La respuesta es pues que las dos partículas tienen la misma energía cinética al pasar por la posición de equilibrio pues la energía mecánica no depende de la masa de la partícula que vibra tal como se ha explicado en el apartado a).

c) La velocidad de la partícula en la posición de equilibrio es máxima, su expresión es:

$$v_{max} = \pm A\,\omega$$

Donde ω es la pulsación del movimiento, que se puede calcular a partir de la siguiente expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Donde m es la masa de la partícula vibrante y k es la constante recuperadora del muelle. Por tanto,

$$v_{max} = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si se cambia la masa por m' la expresión será,

$$v'_{max} = \pm A\sqrt{\frac{k}{m'}}$$

Como m' > m, $v'_{max} < v_{max}$, pues la masa aparece en el denominador. Es decir, la partícula de menor masa pasará más rápida por la posición de equilibrio.

Este resultado es congruente con el obtenido en el apartado b). Las energías cinéticas de las dos partículas son iguales a pesar de que la de menor masa pase a mayor velocidad. Los valores de energía cinética se igualan al compensarse el aumento de la masa de la partícula con la disminución de la velocidad de la misma.

Ampliación del problema

También varía, al aumentar la masa, la pulsación ω, y, por tanto, la frecuencia.

$$E_m = \frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,A^2$$

en esta expresión podemos ver que si la masa aumenta la pulsación disminuye para mantener así constante la energía mecánica. También, si la pulsación disminuye, la frecuencia disminuye ya que,

$$\omega = 2\pi f$$

4) Amortiguamiento

Hasta ahora se ha estudiado el m.a.s. de sistemas ideales que, bajo la acción de una fuerza recuperadora, se considera que pueden oscilar indefinidamente. Sin embargo, en los sistema reales, como una persona que se columpia, o una cuerda de guitarra, la amplitud de las oscilaciones decrece. Esto se debe a la pérdida de energía mecánica, principalmente por la intervención de fuerzas de rozamiento. En este caso decimos que el movimiento está amortiguado y que el cuerpo realiza oscilaciones amortiguadas.

Un movimiento oscilatorio es amortiguado si la energía mecánica de su movimiento disminuye gradualmente; como consecuencia, aunque se mantienen las oscilaciones, éstas disminuyen su amplitud con el tiempo.

La disminución de la amplitud con el tiempo suele ser de tipo exponencial

$$x = A\, e^{-\gamma\, t}\, \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

En los sistemas osciladores reales la amplitud de las oscilaciones disminuye debido a la disipación de la energía. Ahora bien, es posible mantener dicha amplitud si un agente externo le suministra la energía que pierde por rozamiento. En este caso decimos que el sistema realiza oscilaciones forzadas.

Llamamos oscilaciones forzadas a las producidas en un sistema oscilante debido a la energía suministrada desde el exterior; dicho sistema es un oscilador forzado.

Si la acción de las fuerzas externas compensa exactamente la de las fuerzas disipativas que reducen la amplitud de las oscilaciones, es posible mantener constante la amplitud de éstas en el sistema oscilador.

Un ejemplo de este tipo de sistemas es el reloj de péndulo, donde la amplitud del movimiento del péndulo se mantiene gracias a un resorte en espiral al que está conectado. Otro ejemplo muy común es una persona que se mantiene en movimiento en un columpio y se impulsa únicamente lo suficiente para compensar las pérdidas de energía por rozamiento.

Si la frecuencia con que actúa una fuerza externa coincide con la frecuencia natural del oscilador, la energía absorbida por éste es máxima. Entonces decimos que ésta es una frecuencia resonante y que el oscilador entra en resonancia.

La resonancia no se produce porque la fuerza externa sea muy grande, sino porque actúa con la misma frecuencia que la natural del sistema oscilante. En el caso de que la energía externa llegue al oscilador con más rapidez que lo que tarda en disiparse, lo que ocurre es que aumenta excesivamente la amplitud de las oscilaciones y puede llegar a producirse la rotura del oscilador o a perjudicar seriamente su estructura interna.

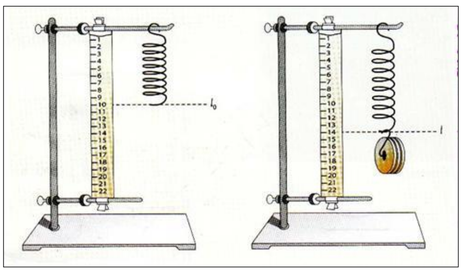
5) Estudio de algunos osciladores mecánicos

5.1.- Masa colgada de un resorte vertical

① Situación inicial: un muelle de constante elástica k y longitud l_o está suspendido de un extremo. Inicialmente el muelle no está deformado.

② Si colgamos una masa del extremo del muelle éste se estirará hasta una longitud l, el alargamiento que experimenta el muelle es

$$\Delta l = l - l_o$$



En esta posición el sistema está en equilibrio. La posición de equilibrio de un muelle en vertical es muy útil para determinar la constante elástica de muelle, siempre que se conozca la masa que se cuelga y el estiramiento del muelle respecto de la posición inicial. En esta situación, como se ha visto en el problema de la página 22, se produce un equilibrio, la fuerza recuperadora (ley de Hooke) que tiende a llevar el muelle a la posición inicial se iguala con la fuerza peso. Por tanto, podemos igualar los módulos de ambas fuerzas,

$$P = F_e \,; \quad P = k\,\Delta l$$

$$m\,g = k\,\Delta l$$

Esta expresión que se suele utilizar para determinar k (método estático),

$$k = \frac{mg}{\Delta l}$$

③ Si, partiendo de la situación ②, aplicamos verticalmente hacia abajo una fuerza externa, F_{ext}, el muelle se deforma una cantidad adicional que llamaremos A. Mientras apliquemos la fuerza externa, el muelle permanece en equilibrio, por lo que el módulo de la fuerza recuperadora se incrementa en una cantidad igual a $k{\cdot}A$.

Al soltar el cuerpo, como la fuerza recuperadora es mayor que el peso, comienza a desplazarse hacia la posición de equilibrio, de forma que inicia un m.a.s. en el que el módulo de la fuerza neta, F, que actúa sobre el cuerpo es,

$$F = F_e - P = k\,\Delta l + k\,A - k\,\Delta l = k\,A$$

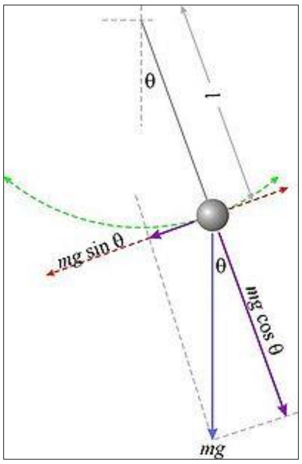
Este es módulo de la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo al iniciar el m.a.s. Como sabemos que el sentido de la fuerza recuperadora es contrario al del desplazamiento del muelle, es más correcto expresarla vectorialmente

$$\vec{F} = -k\,\vec{A} \quad o \quad F = -k\,A$$

Esta última expresión permite conocer la fuerza máxima al iniciarse el movimiento. El resto de ecuaciones que permiten estudiar el movimiento armónico que se produce ya se han visto a lo largo del tema.

5.2.- Péndulo simple

Un péndulo simple es un oscilador fácil de observar que permite comprobar experimentalmente las características del m.a.s.



Un péndulo simple lo puede formar un cuerpo colgado de un hilo inextensible y que se mueve sin rozamiento. El hilo debe ser relativamente largo para que el ángulo desviado, θ, sea pequeño.

El análisis de las fuerzas ejercidas sobre la masa oscilante ya se ha realizado en la página 4. La fuerza que no se equilibra, $F_{tangencial}$, y que provoca el m.a.s. es,

$$F_t = m\,g\,\text{sen}\,\theta$$

Para ángulos muy pequeños se puede aplicar la siguiente aproximación,

$$\theta \cong \operatorname{sen}\theta$$

Donde θ debe venir medido en radianes. El límite está en torno al ángulo de 15º,

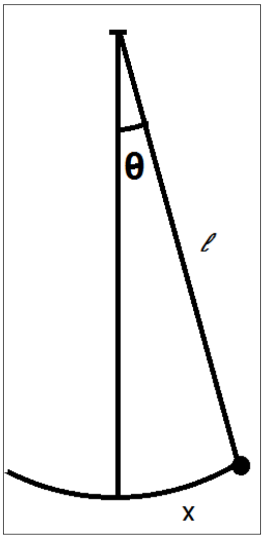
$$15° \rightarrow 0,26\, rad.$$

$$sen\, 0{,}26 = 0{,}2571$$

Así, para ángulos de desviación pequeños,

$$F_t = m\, g\, \theta$$

Como arco = ángulo · radio,



$$x = \theta \cdot l$$

$$F_t = m\, g\, \frac{x}{l}$$

Este es el módulo de la fuerza recuperadora en un péndulo simple de oscilaciones de ángulo pequeño. Al igual que en el muelle, sabemos que el sentido de la fuerza recuperadora es contrario al del desplazamiento del péndulo. Así es más correcto expresarla vectorialmente como

$$F_t = -\frac{m\, g}{l} x$$

Como *m, g* y *l* son constantes, la expresión es similar a la ley de Hooke

$$F = -k\, x \quad donde \;\; k = \frac{m\, g}{l}$$

En el péndulo la fuerza recuperadora, F_t, responsable del m.a.s. es de naturaleza gravitatoria. Esta fuerza provoca un movimiento acelerado que, de acuerdo con la ley de Newton,

$$a = \frac{F_t}{m} = \frac{-\,k}{m}\, x$$

$$a = -\,\omega^2 x$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Otras consideraciones sobre el péndulo:

- En el movimiento pendular x es el arco correspondiente al ángulo θ y representa la elongación o desplazamiento en un momento dado. Si la longitud del péndulo es grande, el arco es prácticamente una recta.

- La constante $k = \frac{m\, g}{l}$ tiene unidades de $N \cdot m^{-1}$, como si fuera una constante recuperadora de un resorte, pero sus significados son distintos. Así hemos visto que en un resorte el periodo de oscilación viene dado por,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Si desarrollamos esta expresión en un péndulo,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{m\,g}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Como vemos, el periodo del m.a.s. de un resorte depende de la masa que oscila y de la naturaleza del propio resorte, mientras que el periodo de un péndulo no depende de la masa que cuelga sino de la longitud del péndulo y del lugar en el que se encuentre.

5.3.- Un problema resuelto

Un péndulo simple está constituido por una masa puntual de 0,5 kg que cuelga de un hilo de 1 m de longitud. Oscila con una amplitud de 8 grados en un lugar con gravedad igual a 9,8 m/s^2.
Determina: a) Su energía potencial máxima; b) su velocidad máxima.

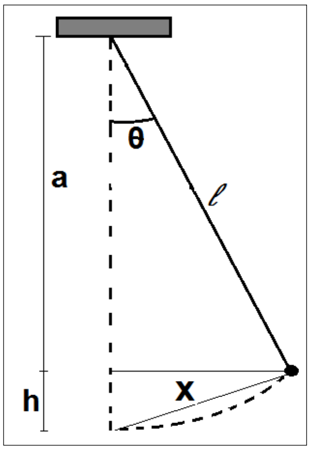
Datos:

m = 0,5 kg

ℓ = 1 m

θ = 8º

g = 9,8 m/s^2



a) *"resolución gravitatoria"*

La energía potencial gravitatoria de la masa m viene dada por

$$E_p = m\,g\,h$$

donde h = ℓ – a = 1 – a. Por otra parte,

$$a = l\cos 8 = 1\cos 8 = 0{,}990\;m$$

Por tanto, h = 0,01 m y, en consecuencia,

$$E_p = m\,g\,h = 0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}01 = 0{,}049\;J$$

"resolución m.a.s."

Como el ángulo que da la amplitud es inferior a 15º, el movimiento del péndulo se asemeja a un m.a.s. Por tanto, podemos asimilar su energía potencial a la expresión de la energía potencial de un resorte, es decir,

$$E_p = \frac{1}{2}\,K\,x^2$$

Donde

$$k = \frac{m\,g}{l} = \frac{0{,}5 \cdot 9{,}8}{1} = 4{,}9\;\;N/m$$

Por otra parte, el esquema se ha exagerado mucho porque el arco descrito por la masa y x prácticamente deben coincidir si el ángulo es muy pequeño, es decir,

$$x = \theta \cdot l = 0{,}14 \cdot 1 = 0{,}14\;m$$

Donde el ángulo de 8º se ha puesto en radianes.

En definitiva,

$$E_p = \frac{1}{2}\,K\,x^2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}9 \cdot 0{,}14^2 = 0{,}048\;J$$

b) La energía potencial calculada en el apartado anterior corresponde también con la energía mecánica del oscilador ya que la posición de la masa oscilante es uno de los extremos de vibración.

La velocidad máxima del oscilador tiene lugar cuando éste pasa por la posición de equilibrio, en ese punto el oscilador no tiene energía potencial pues ésta se ha transformado en energía cinética, cuyo valor corresponderá, por tanto, a la energía mecánica del oscilador. Por tanto, en la posición de equilibrio,

$$E_m = E_c = 0{,}049\ J$$

A partir de la expresión de la energía cinética, despejamos la velocidad,

$$v = \sqrt{\frac{2\ E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}049}{0{,}5}} = \pm\ 0{,}45\ m/s$$

Estos apuntes se finalizaron el 14 de octubre de 2010
en Villanueva del Arzobispo, Jaén (España).
Realizados por: Felipe Moreno Romero
fresenius1@gmail.com
http://www.escritoscientificos.es