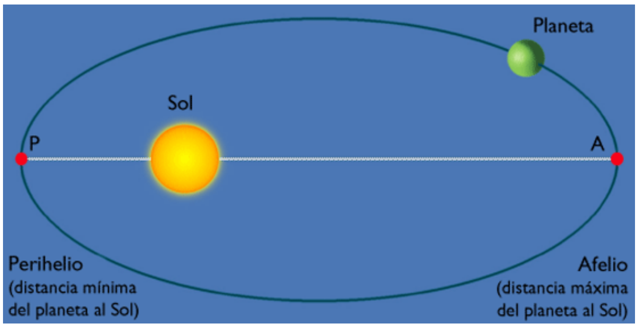
BLOQUE 1:
INTERACCIÓN GRAVITATORIA

La interacción gravitatoria es una de las interacciones que junto a la electromagnética, la nuclear fuerte y la nuclear débil forma el conjunto de las cuatro interacciones fundamentales que permiten explicar el comportamiento de los objetos físicos que nos rodean. La **ley de gravitación universal** enunciada por Isaac Newton, en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada en 1687 permite explicar el movimiento de todos los cuerpos celestes así como el movimiento de cualquier cuerpo sobre la superficie terrestre, dando lugar a la primera gran unificación de la Física.

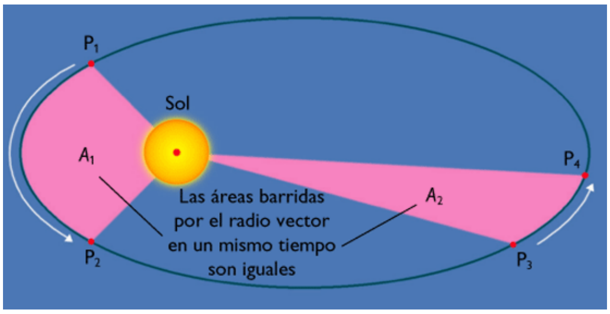
1. LEYES DE KEPLER

El astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), a partir de los datos astronómicos de su colaborador, el astrónomo danés Tycho Brahe, enunció las tres leyes que describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol (estas leyes son extrapolables a cualquier sistema de cuerpos que gire alrededor de un mismo centro).

a. Los planetas describen órbitas planas y elípticas alrededor del Sol, estando éste en uno de los focos de la elipse.



b. Ley de las áreas: Los radios vectores que unen cada planeta con el Sol, recorren áreas iguales en tiemplo iguales (la velocidad areolar es constante).



https://www.edumedia-sciences.com/es/media/347-leyes-de-kepler

c. Los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas alrededor del Sol, son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores (nosotros aproximaremos por el radio medio de la órbita).

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{T'^2}{R'^3} = \cdots = K$$

Esta constante K, es independiente de la masa del planeta atraído, y como veremos, sólo depende de la masa del cuerpo que está en el centro.

Comentarios:

- Dado que las excentricidades de las órbitas recorridas por los planetas alrededor del Sol, son casi cero, podemos considerar que las órbitas son casi circulares.
- La ley de las áreas implica que la velocidad en el perihelio es mayor que en el afelio.
- El año solar en los planetas más alejados del Sol que la Tierra (Marte, Júpiter, etc), es más largo que el año solar terrestre. En los más cercanos (Venus y Mercurio), ocurre lo contrario.

Movimiento circular

Como las excentricidades de las órbitas descritas por los planetas alrededor del Sol, son casi cero, podemos considerar las órbitas circulares sin demasiado error. En este caso, la velocidad orbital (velocidad con la que el planeta recorre su órbita), es constante. Aproximaremos por lo tanto los movimientos de planetas y satélites a movimientos circulares y uniformes.

El periodo T de revolución de un planeta (o satélite), es el tiempo que emplea el planeta (o satélite) en completar su órbita. Por lo tanto podremos calcular la velocidad angular ω como: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ *rad/s.*

La relación entre los módulos de las velocidades angular y lineal es: $v = \omega R$, *siendo R, el radio de la trayectoria circular.*

Realmente la relación entre los vectores velocidad lineal y angular es $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$

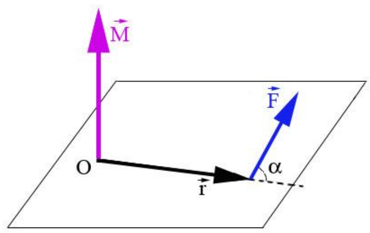
Sabemos que siempre que una partícula se mueva en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad tiene que cambiar (recuerda que el vector velocidad es tangente en cada punto a la trayectoria). Esto implica una componente de la aceleración perpendicular a la trayectoria, aun cuando la rapidez sea constante. Esta aceleración perpendicular en cada punto de la trayectoria al vector velocidad es la aceleración normal o centrípeta cuya expresión es: $a_c = \frac{v^2}{R}$ *o en función de la velocidad angular:* $a_c = \omega^2 R$ *y en cada punto va dirigida hacia el centro de la trayectoria.*

Ya sabes que siempre que haya aceleración, tiene que haber una fuerza. En el caso del movimiento de planetas y satélites, esta fuerza es, evidentemente, la fuerza gravitatoria que estudiaremos en el punto siguiente. Analizaremos a continuación, el papel de la fuerza en las rotaciones.

Momento de torsión o momento de la fuerza.

¿De qué depende la efectividad de una fuerza para causar o alterar un movimiento de rotación? Si tratamos de abrir una puerta, es mucho más efectivo empujar lejos del eje de rotación, que cerca de él. Por lo tanto, la magnitud y dirección de la fuerza son

importantes, pero también lo es la posición del punto de aplicación. ***La medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para causar o alterar la rotación de un cuerpo se denomina momento de torsión o momento de la fuerza.***



Matemáticamente: el momento de una fuerza respecto a un punto O, se define como el producto vectorial del vector de posición del punto de aplicación de la fuerza respecto del punto O por la fuerza.

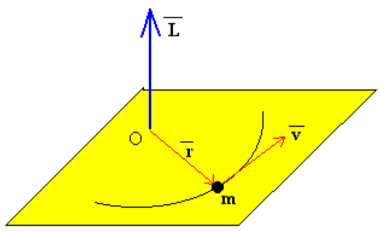
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

La magnitud de $\vec{M}$ *es* $rFsen\alpha$*, siendo α, el ángulo que forman el vector r y el vector fuerza. Su dirección es la perpendicular a r y a F y su sentido viene determinado por la regla de la mano derecha del producto vectorial.*

Momento angular

Tenemos un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad v respecto a cierto punto O, describiendo una trayectoria curvilínea. El momento angular de la partícula respecto del punto O es el producto vectorial del vector de posición del cuerpo respecto del punto O, por el vector cantidad de movimiento: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Dicha magnitud, es un vector, perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{r}$ *y* $\vec{p}$*, cuyo sentido viene determinado por el avance del sacacorchos al hacer girar* $\vec{r}$ *sobre* $\vec{p}$ *y su módulo viene dado por:* $L = r \cdot p \cdot sen\alpha$*, siendo* α *el ángulo que forman los vectores* $\vec{r}$ *y* $\vec{p}$*. La unidad de L en el sistema internacional es* $kg \cdot m^2/s$.



Si se elige adecuadamente el sistema de referencia, en los movimientos rectilíneos siempre podemos hacer que el momento angular sea nulo. Por tanto, esta magnitud carece de importancia en ese tipo de movimientos. En cambio todos los movimientos que impliquen un giro de la partícula estarán caracterizados por un valor concreto del momento angular.

Conservación del momento angular

Si derivamos la expresión del momento angular respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

En la expresión anterior, el primer sumando es nulo ($\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$*) y teniendo en cuenta que:* $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$*, nos quedará:* $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$

Por lo tanto, se conservará el momento angular si:

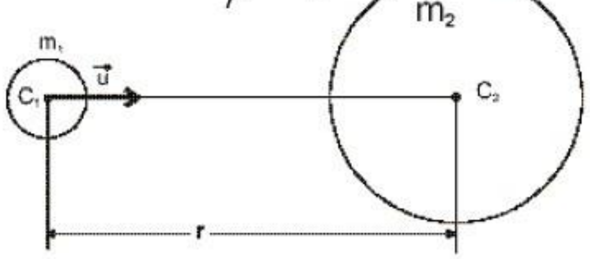
a) No actúa ninguna fuerza sobre la partícula.

b) *Si la dirección de la fuerza que actúa sobre la partícula es paralela al vector de posición del punto donde se aplica. Las fuerzas que cumplen esta última condición se denominan* ***fuerzas centrales****. Un caso de fuerza central es la fuerza gravitatoria.*

2. LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Como ya hemos dicho, fue enunciada por Sir Isaac Newton en 1687 y establece el carácter fundamental de la atracción gravitatoria entre dos masas cualesquiera.

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\vec{u}_r$$



La interacción gravitatoria entre dos masas es atractiva y puede expresarse mediante una fuerza central que es directamente proporcional a las masas de las partículas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

$$F \propto \frac{mm´}{r^2}$$

Podemos transformar la expresión anterior en una igualdad introduciendo la correspondiente constante de proporcionalidad, la **constante gravitación universal G.**

El signo menos nos indica que el vector $\vec{r}$ que define la posición de m_2 respecto a m_1 es de sentido contrario a la fuerza $\overrightarrow{F_{12}}$ que la masa 1 ejerce sobre la masa 2 (siempre atracción).

- El principio de acción y reacción, también enunciado por Newton, nos lleva a la conclusión de que $\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}}$, es decir, la fuerza que la masa 1 ejerce sobre la 2, es igual y de sentido contrario a la que la masa 2 ejerce sobre la 1.
- **G** es la **constante de gravitación universal,** independiente de cualquier circunstancia o ambiente que rodee a las masas que se atraen. Su valor en el S.I. es $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$. *El pequeño valor de G, implica que la interacción gravitatoria sea poco intensa, siendo sólo especialmente relevante, cuando las masas que se atraen son muy grandes como planetas, estrellas…*
  La constante G fue medida por Henry Cavendish. (Ver el enlace del experimento de Cavendish). https://youtu.be/fyE1uTt-GIw
- La fuerza anterior, **siempre es atractiva** y tiene la dirección de la recta que une las masas. Es lo que se llama una **fuerza central.**
- **La fuerza gravitatoria es conservativa.**

Fuerzas gravitatorias sobre un conjunto de masas: principio de superposición.

Cuando tenemos un conjunto de varias masas, es de suponer que la fuerza gravitatoria que actúa sobre una de ellas se deba a la suma de las fuerzas que sobre ésta ejercen las demás.

La fuerza que actúa sobre una masa cualquiera de un conjunto de masas es igual a la resultante de las fuerzas que las demás ejercen sobre ella, consideradas individualmente:

$$\vec{F}\,total\ sobre\ 1 = \overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{31}} + \overrightarrow{F_{41}} + \cdots + \overrightarrow{F_{N1}} = \sum_{i=2}^{n} \overrightarrow{F_{\imath 1}}$$

Donde $\overrightarrow{F_{\imath 1}}$ son las distintas fuerzas que sobre la masa 1 ejercen las masas restantes.

3. CONSECUENCIAS DE LA LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

El enunciado de la ley de gravitación universal de Newton permite dar una respuesta satisfactoria a dos de los problemas que por entonces subsistían:

- Por una parte, avala matemáticamente las ideas de Galileo sobre la caída libre de los cuerpos.
- Por otra, permite explicar las leyes de Kepler, en particular establecer el significado físico de la constante K que aparece en la tercera ley de Kepler.

3.1. Aceleración de caída libre de los cuerpos en las superficies planetarias

Si un cuerpo de masa *m* se encuentra a una altura *h* sobre la superficie terrestre, se hallará sometido a una fuerza de valor:

$$F = G\frac{m_T m}{(r_T + h)^2}$$

Dicha fuerza le comunicará una aceleración en la dirección de la fuerza actuante (de acuerdo con la segunda ley de Newton), que vendrá dada por:

$$F = G\frac{m_T m}{(r_T + h)^2} = ma$$

Por lo que la aceleración valdrá: $a = G\frac{m_T}{(r_T+h)^2}$. ¿Qué implica esta expresión?

- La aceleración con que cae a Tierra un objeto de masa *m* sólo depende de la masa de la Tierra y no de la del objeto. Una piedra de 100 kg de masa cae con la misma aceleración que una de 10 kg, en contra de las creencias pregalileanas.
- La aceleración varía de manera inversa al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. Si la altura *h* es muy pequeña en comparación con el radio terrestre ($h \ll r_T$), entonces, de forma aproximada podemos escribir:

$$a = G\frac{m_T}{r_T^2}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, los valores de $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$, $m_T = 6 \cdot 10^{24}kg$ y $r_T = 6370\ km$, se obtiene el valor de $\boldsymbol{a=9{,}8\ m/s^2}$, que coincide con el valor de g en la superficie terrestre.

Lo deducido anteriormente, es válido para la aceleración de caída en la superficie de cualquier planeta o satélite, solo hay que sustituir los valores correspondientes de la masa y el radio del planeta o satélite en cuestión.

Variaciones locales del valor de g: El valor de la aceleración g=9,8 m/s², no es el mismo en todos los puntos de la superficie terrestre consecuencia de los siguientes factores:

- **Dependencia de la latitud:** Debido a la rotación terrestre alrededor de su eje, la Tierra está achatada por los polos, con lo que adquiere la forma de un elipsoide , ya que las distribuciones de masas en el ecuador se hallan sometidas a fuerzas inerciales centrífugas que no operan sobre los polos. Ello da lugar a un doble efecto: por una parte, la distancia al centro en el ecuador es mayor que en los polos, y por otra, la fuerza de atracción gravitacional sobre cualquier cuerpo del ecuador se verá mermada por la fuerza centrífuga que actúa en contra, por lo que la fuerza neta (su peso neto), y en consecuencia la aceleración que actúa sobre el cuerpo serán algo menores. Por tanto el valor de g irá disminuyendo de los polos al ecuador en función de la latitud.
- **Anomalías locales:** Se deben a heterogeneidades de la corteza terrestre, tanto en lo referente a la distribución de las masas (montañas, macizos,…), como a las diferentes densidades de las rocas de la corteza. Estas anomalías suelen abarcar zonas pequeñas y pueden testimoniar la existencia de yacimientos de minerales que tienen una densidad o muy grande (por ejemplo, menas metálicas) o muy pequeña (por ejemplo, yacimientos petrolíferos, depósitos salinos, etc).

3.2. Explicación de las leyes de Kepler.

- Al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento de un planeta en torno al Sol, y tener en cuenta que la fuerza actuante es la interacción gravitatoria entre las masas tendríamos:

$$G\frac{M_S M_p}{R_{S-P}^2} = M_P\frac{d^2R}{dt^2}$$

  Al resolver la ecuación anterior, obtenemos las ecuaciones paramétricas de la trayectoria, que resultan ser las correspondientes a una elipse. Por lo tanto los planetas se mueven alrededor del Sol, siguiendo órbitas elípticas (1ª ley de Kepler).
- Ya hemos dicho que la fuerza gravitatoria es central (la dirección de la fuerza es paralela al vector de posición del punto donde se aplica), por lo tanto $\vec{M} = 0$, de lo que se deduce que $\vec{L}$ es constante. El que el vector momento angular sea constante implica:
  a) Si no varía la dirección de L, el movimiento del planeta ha de estar confinado en un plano determinado por el vector de posición y el vector velocidad.
  b) El sentido de L no varía. Por tanto el planeta tampoco varía el sentido de su movimiento.

c) El módulo de L permanece constante, lo cual nos permite demostrar la segunda ley de Kepler.

Si nos fijamos en el área A_1 (figura 2), cuando la partícula se mueve de la posición 1 a la posición 2, recorre en un intervalo de tiempo dt, un arco de trayectoria dr=vdt.

El área barrida por el radio vector en un intervalo de tiempo dt sería: $dS = \frac{1}{2} rvdt$, por lo tanto el área barrida por el radio vector en la unidad de tiempo será: $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} rv = \frac{1}{2} rv \frac{m}{m}$, siendo rvm, el valor del momento angular del planeta respecto del Sol, que es constante, por lo que $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$, cantidad que es constante.

Este último resultado corresponde a la ley de las áreas, por lo que la segunda ley de Kepler queda demostrada.

- Veamos ahora el significado físico de la constante K que aparece en la tercera ley de Kepler.

Consideremos un planeta de masa *m* que orbita en torno al Sol de masa M, a una distancia media R; si tenemos en cuenta que la fuerza gravitatoria es centrípeta, nos encontraremos con la siguiente identidad:

$$G \frac{mM_S}{R^2} = m\omega^2 R$$

Como $\omega = \frac{2\pi}{T}$ *, tenemos:* $G \frac{mM_S}{R^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} R$ *y reordenando la ecuación:* $\frac{R^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$=K

Como vemos en la igualdad anterior, el valor de K es el mismo para todos los planetas que giran alrededor del Sol, ya que solo depende de la masa del Sol y no de la masa de los planetas.

Lo mismo es válido para el sistema formado por un sistema de satélites en torno a un planeta, la constante k en este caso es solo función de la masa del planeta.

4. CONCEPTO DE CAMPO

Ya hemos visto que la ley de gravitación universal es capaz de dar una explicación satisfactoria al movimiento de los astros y de los cuerpos en las superficies planetarias. Sin embargo, la nueva teoría daba pie a una pregunta que suscitó gran controversia: ¿cómo es posible la acción a distancia?

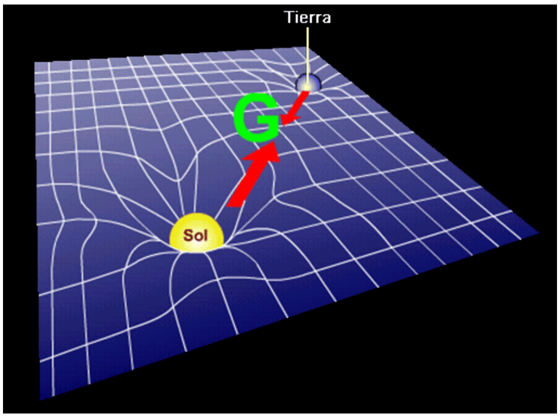
Al empujar una mesa con la mano, no es difícil de entender cómo tiene lugar la interacción entre la mano y la mesa, puesto que ambas están en contacto. Sin embargo, ¿cómo podemos explicar la interacción entre la Tierra y el Sol, separados por una distancia de millones de kilómetros? ¿Son distintas la interacción de nuestra mano con la mesa y la de la Tierra con el Sol?

Si analizamos rigurosamente el término contacto, veremos que en realidad no hay diferencia entre uno y otro caso. El término contacto, entendido como distancia nula entre dos cuerpos, no existe. Cuando empujamos la mesa, los electrones más externos de los átomos situados en la superficie de nuestra mano, no llegan nunca a estar en contacto con los electrones más externos de los átomos de la superficie de la mesa. Según la ley de Coulomb, esto requeriría una fuerza infinita. Utilizamos el término contacto como una sensación fisiológica, ya que nuestro sentido del tacto, "nota el contacto a cierta distancia". Por tanto, todas las interacciones que se producen entre los cuerpos, son realmente interacciones a distancia. Queda en pie, de todas formas, la cuestión relativa a cómo se transmite la interacción. Asimismo, hemos supuesto implícitamente que las interacciones son instantáneas, lo que supone que éstas se transmiten a una velocidad infinita.

El problema de la interacción a distancia, no pasó desapercibido al propio Newton. Esta dificultad, no se disipó hasta que en el siglo XIX, Michael Faraday, en sus estudios sobre electricidad, introdujo y sistematizó el concepto de campo.

Para entender el concepto de campo, hablaremos de **campo creado por una partícula *M*** y de las consecuencias que dicho campo tiene sobre una segunda partícula colocada en el seno de dicho campo. A esta segunda partícula la llamaremos **partícula testigo *m***.

La partícula *M,* perturba las propiedades del espacio en derredor suya, de forma que, al colocar allí un segundo cuerpo *m*, actúe sobre él una fuerza. La existencia del campo en cada punto alrededor del primer cuerpo, hace que al colocar un segundo cuerpo en uno de esos puntos, actúe una fuerza sobre él. De este modo, la fuerza que actúa sobre *m*, se debe al campo que crea el cuerpo *M* en el punto donde está situado *m*.



Debemos establecer cuáles son las magnitudes que definen esta región espacial. En principio estas magnitudes dependerán de la posición y del tiempo. Sin embargo, consideraremos en este curso que los campos son **estacionarios**, es decir, que no varían con el tiempo, en consecuencia las magnitudes que lo definen **dependerán solo de la posición**. Hemos de tener en cuenta que en la definición de dichas magnitudes, no podrán aparecer factores que dependan de partículas ajenas o partículas testigo situadas en dicho campo, solo pueden depender de la masa M que crea el campo.

La fuerza, no puede considerarse una magnitud propia del campo pues es función de la partícula testigo. A la hora de describir el campo, tendremos que distinguir entre:

- **Magnitudes que definen el campo:**
  - **Intensidad** del campo gravitatorio en un punto, desde una perspectiva dinámica.
  - **Potencial** del campo gravitatorio en un punto, dentro de un enfoque energético de la interacción.
- **Magnitudes inherentes a la interacción del campo con una partícula:**
  - **Fuerza** que actúa sobre la partícula testigo como medida de la interacción.
  - **Energía potencial** de la partícula asociada a su posición relativa en el campo, dentro del enfoque energético de la interacción.

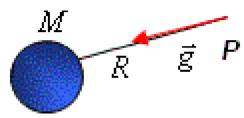
4.1. VECTOR INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO EN UN PUNTO.

Determinaremos el vector intensidad de campo creado por una masa puntual m en un punto P, de vector de posición $\vec{r}$, respecto de la masa m que crea el campo. Ya hemos dicho que no podemos considerar la fuerza que actúa sobre una partícula situada en el campo por depender de la partícula testigo. Podemos sin embargo utilizar como magnitud representativa de dicho campo, **la aceleración que adquiriría una partícula de masa 1, situada en dicho punto.** (Ya hemos visto que dicha aceleración no depende de la masa de la partícula testigo, sólo de la masa que crea el campo). Designamos dicha aceleración con la letra **g**, por lo tanto: $\vec{g} = -G\frac{m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$.

A la magnitud $\vec{g}$ cuyas unidades son las de aceleración, se le denomina **intensidad del campo gravitatorio.** Dicha intensidad, define al campo gravitatorio desde el punto de vista dinámico y puede considerarse como la fuerza que actuaría sobre la unidad de masa testigo colocada en el punto donde calculamos el campo: $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$.

La unidad del campo gravitatorio en el S.I. es el N/kg que equivale a m/s^2.

- $\vec{g}$ es una magnitud **vectorial** radial. Es un **campo central.**
- Su sentido apunta hacia la masa puntual que da lugar al campo.
- Su valor varía conforme al cuadrado de la distancia. Por lo tanto **su valor es el mismo en cualquier punto situado a igual distancia de la masa m.**



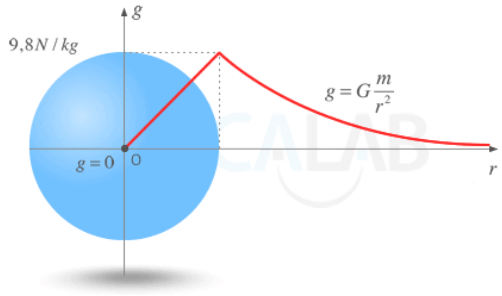
$$\vec{g} = G\cdot\frac{M}{R^2}\cdot\vec{u}$$

<u>Principio de superposición de campos:</u> Si en una región del espacio existen n masas, el campo en un punto dado a distancias r_i de las masas, será la composición vectorial de los campos individuales generados en ese punto por cada una de las masas: $\vec{g} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{g_i}$

Campos gravitatorios producidos por cuerpos esféricos: Hemos hablado de las características del campo creado por una masa considerada puntual. Sin embargo, en nuestro universo no existen masas puntuales y sí, numerosos cuerpos con simetría esférica. Según el **<u>teorema de Gauss</u>**, el campo **en un punto exterior** del cuerpo esférico es el mismo que se obtendría si toda la masa de éste, estuviera concentrada en su centro. Pero, ¿qué ocurre en el interior? Haciendo uso del mismo teorema de Gauss, podríamos comprobar que:

- El campo en el centro de la esfera (r=0) es nulo.
- El valor del campo en el interior de la esfera sólida homogénea aumenta linealmente con la distancia al centro de la esfera ($\vec{g} = -G\frac{M}{R^3}r\,\overrightarrow{u_r}$, donde R es el radio de la esfera y r la distancia al centro de la misma).

Aplicando lo anterior al campo gravitatorio terrestre, si consideramos que la Tierra es aproximadamente una esfera sólida, tendríamos que: la intensidad de campo gravitatorio sería 0 en el centro de la Tierra. Iría aumentando linealmente con la distancia al centro hasta tomar el valor 9,8 en la superficie, desde donde va disminuyendo conforme al inverso del cuadrado de la distancia al centro, hasta hacerse cero nuevamente en el infinito.



4.2. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

La expresión de energía potencial gravitatoria $E_p = mgh$, se obtiene suponiendo que la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo es constante. **La fuerza gravitatoria sólo puede considerarse constante si el cuerpo se mueve sobre la superficie de la Tierra.** Si un cuerpo se mueve fuera de la Tierra (como ocurre con los satélites), la fuerza que actúa sobre él no es constante y viene definida por la ley de gravitación universal. **En problemas en los que *r* cambia tanto que la fuerza gravitatoria no puede considerarse constante, necesitamos una expresión más general de la energía potencial gravitatoria.**

Para obtener esta expresión tendremos en cuenta que la fuerza gravitatoria es **conservativa** y por lo tanto el trabajo que realiza se puede expresar como la diferencia de dos valores de energía potencial.

- Calcularemos la energía potencial del sistema formado por dos masas separadas una distancia r, evaluando el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria ejercida por un cuerpo de masa m para traer otro de masa m' desde el infinito a una distancia r de la primera masa. Como la fuerza es conservativa, el trabajo no depende de la trayectoria entre las posiciones, sino solo de los puntos inicial y final, por lo que podemos suponer que la trayectoria es radial.

$$W = \int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -Gmm' \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -Gmm' \left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = G\frac{mm'}{r}$$

Y por ser la fuerza conservativa $W = -\Delta E_p = Ep(\infty) - Ep(r)$

Fijaremos como origen de energía potencial, aquel en el que la fuerza gravitatoria es cero, por lo tanto: Ep(∞) = 0.

Y por lo tanto: $E_p(r) = -G\frac{mm'}{r}$

Energía potencial de un sistema de partículas.

Podemos extender lo anterior al caso de tres o más partículas. La energía potencial total del sistema es **la suma de todas las energías potenciales llevada a cabo sobre todos los pares de partículas**. Así si tenemos un sistema formado por tres partículas m_1, m_2 y m_3, la energía potencial asociada al sistema es:

$$E_{ptotal} = E_{p1,2} + E_{p1,3} + E_{p2,3} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G\frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G\frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$

La energía potencial del sistema nos da la medida del trabajo que debería realizarse para separar el sistema hasta hacer infinita la distancia entre las partículas.

4.3. POTENCIAL GRAVITATORIO

Se define el potencial gravitatorio producido por una masa m en un punto, V, como la energía potencial que adquiriría la unidad de masa colocada en dicho punto.

$V = \frac{E_p}{m'} = -G\frac{m}{r}$ (J/kg) donde r es la distancia entre la masa m que crea el campo y el punto en que calculamos el potencial.

El potencial en un punto P debido a una distribución de masas, es la suma algebraica de los potenciales producidos por cada una de las masas.

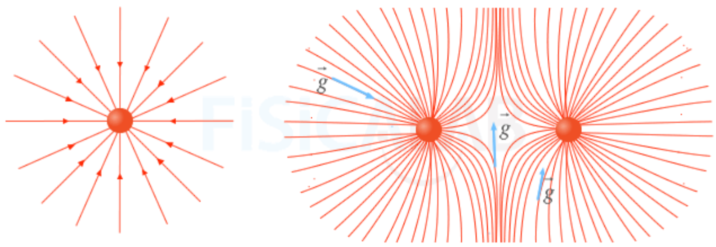
El significado físico del potencial sería: el trabajo necesario para trasladar **a la unidad de masa** desde el infinito hasta el punto en el cual estamos calculando el potencial.

4.4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL CAMPO GRAVITATORIO

En función de las dos magnitudes que pueden usarse para definir el campo, existen dos formas de representar éste gráficamente: mediante **líneas de fuerza o de campo**, si elegimos como magnitud la intensidad del campo, o mediante **superficies equipotenciales**, si utilizamos el potencial.

Líneas de fuerza: Se trazan según los siguientes criterios:

- Son tangentes en todos los puntos al vector intensidad del campo. Por tanto, su dirección coincide con la de dicho vector en cada punto. Su sentido es siempre entrante hacia la masa que crea el campo.

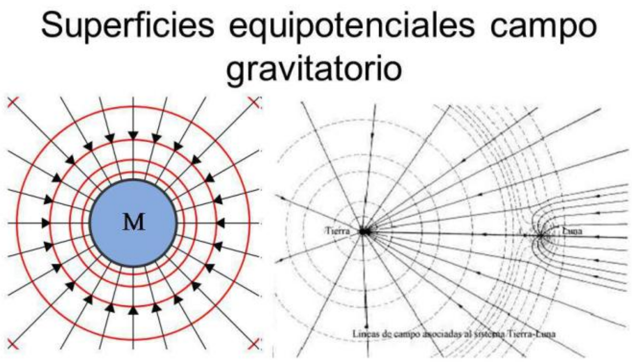


- Como consecuencia del principio de superposición (en cada punto solo hay una intensidad de campo resultante), las líneas de fuerza nunca se entrecruzan.
- El número de líneas de fuerza que atraviesan una unidad de superficie es proporcional al valor de g.

Superficies equipotenciales: Como se desprende de la expresión del potencial, todos los puntos situados a la misma distancia r de la masa m tienen el mismo valor del potencial. Si unimos todos esos puntos mediante una superficie, habremos dibujado una superficie equipotencial. En el caso de una masa puntual o de cuerpos esféricos, las superficies equipotenciales son esféricas.

- Las superficies equipotenciales resultan ser perpendiculares a las líneas de fuerza.

- Una de las implicaciones del carácter conservativo de la fuerza gravitatoria es que dicha fuerza no realiza trabajo alguno sobre un cuerpo que se mueva en una superficie equipotencial. Como el potencial es el mismo, no hay variación de energía potencial y por lo tanto el trabajo es nulo.



5. APLICACIÓN AL MOVIMIENTO DE PLANETAS Y SATÉLITES

5.1. Velocidad orbital (de un planeta o satélite), es la rapidez (módulo de la velocidad con la que el planeta o satélite recorre su órbita.

Para obtener la expresión de la velocidad orbital, tendremos en cuenta que, suponiendo que los movimientos orbitales sean circulares y uniformes, la única fuerza actuante (la atracción gravitatoria) es una fuerza centrípeta. Si consideramos el caso particular de la Tierra girando alrededor del Sol:

$$G\,\frac{M_S M_T}{D_{S-T}^2} = M_T\,\frac{v_{or}^2}{D_{S-T}} \rightarrow v_{or} = \sqrt{\frac{M_S\,G}{D_{S-T}}}$$

Siendo D_{S-T} , el radio orbital medido desde el centro del Sol al centro de la Tierra.

La expresión anterior es aplicable a cualquier cuerpo que gire alrededor de otro, sin más que sustituir, la masa del Sol, por la masa del cuerpo alrededor del cual gira el objeto del cual calculamos la velocidad orbital, e igualmente, haciendo lo propio con el radio orbital.

5.2. Energía orbital

La constancia de las órbitas planetarias permite suponer que la energía mecánica de los planetas y satélites de nuestro sistema solar se mantiene constante. Aunque hemos visto (1ª ley de Kepler), que las órbitas planetarias son en realidad elípticas, y que la velocidad en el afelio es distinta que en el perihelio (2ª ley de Kepler), la conservación de la energía lleva al mismo resultado: En el perihelio, disminuye la energía potencial con el acercamiento, mientras que aumenta la energía cinética, manteniéndose constante la energía mecánica del cuerpo.

En las órbitas elípticas, aparece una componente tangencial de la fuerza gravitatoria que realiza el trabajo que se traduce en la variación de energía cinética y potencial.

La **energía orbital** de un cuerpo (supongamos la Tierra alrededor del Sol), corresponde a la energía mecánica (suma de las energías cinética y potencial), que dicho cuerpo tiene en la órbita:

$E_{or} = \frac{1}{2} M_T v_{or}^2 - G\frac{M_s M_T}{R_{or}}$ y sustituyendo la expresión de la velocidad orbital del apartado anterior, obtenemos: $E_{or} = -G\frac{M_s M_T}{2R_{or}} = \frac{(E_p)}{2}$

La energía orbital de la Tierra alrededor del Sol, corresponde a la mitad de la energía potencial de la Tierra en su órbita. Como puede verse, la **energía orbital es siempre negativa.**

5.3. Velocidad de escape: Se define la velocidad de escape, como la mínima que debe comunicarse a un cuerpo para que salga del campo gravitatorio de otro. Evidentemente dicha velocidad dependerá del cuerpo de que se "quiera escapar"**.** De nuevo haciendo un balance energético:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{m}\mathrm{v}_{\mathrm{es}}^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 \rightarrow v_{es} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Siendo M y R. la masa y el radio del cuerpo desde donde se escapa el cuerpo de masa m. Como puede verse es independiente de la masa del cuerpo y dado que se obtiene a partir de la igualdad de dos magnitudes escalares, es independiente de la dirección del lanzamiento. Dicha velocidad es característica de cada cuerpo celeste. Sustituyendo los valores terrestres, tenemos un valor de la velocidad de escape desde la superficie terrestre de 11,2 km/s.

En el cálculo anterior no se han tenido en cuenta otros cuerpos que también ejercen atracción gravitatoria. Si lanzamos una sonda desde la Tierra con una velocidad de 11,2 km/s, conseguiremos que salga de la atracción terrestre, pero no del Sistema Solar, sin embargo sabemos que ciertas sondas como las Pioner 10 y 11 o la Voyager 1 y 2, se encuentran ya en los confines del sistema solar. ¿Cómo es posible esto? Se consigue aprovechando lo que se llama ***asistencia gravitacional****. Cuando una sonda se eleva, aumenta su energía potencial a medida que va disminuyendo su energía cinética. Además, conforme se aleja de la Tierra se aproxima a otro planeta, cuya atracción gravitacional, comunica una aceleración a la sonda que se traduce en un aumento de su energía cinética. De esta forma la energía mecánica total de la sonda experimenta un incremento.*

5.4. Energía de lanzamiento (energía para poner en órbita a un satélite). En la mayoría de los casos, interesará poner en órbita satélites alrededor de la Tierra, por lo que nos ceñiremos a este caso.

De nuevo tendremos en cuenta un balance energético, teniendo en cuenta que la energía que le comunicaremos al satélite es cinética.

$$E_{c,lanzamiento} - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{2R_{or}}$$

5.5. Satélite geoestacionario: Se utiliza comúnmente en telecomunicaciones y se caracteriza porque su velocidad orbital coincide con la velocidad de rotación de la Tierra, manteniéndose de esta forma siempre en la vertical del mismo punto. Lo anterior se concreta diciendo que el periodo con que recorre su órbita debe ser 1 día = 84600 s.

Teniendo en cuenta lo anterior: $\sqrt{\frac{GM_T}{R_{or}}} = \frac{2\pi}{T} R_{or} \rightarrow R_{or} = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$

que nos da un valor de $4{,}23 \cdot 10^7 m$.

6. ENERGÍA Y ÓRBITA

Hemos hablado en el apartado anterior de cuál es la velocidad necesaria para que un cuerpo abandone de manera definitiva un campo gravitatorio, la llamada velocidad de escape. Al obtener la expresión de la velocidad de escape vimos que, si un cuerpo alcanza la velocidad de escape, su energía será cero; por tanto, **un cuerpo con energía cero abandonará el campo gravitatorio.**

Al ser la velocidad de escape una velocidad límite que marca el valor mínimo para abandonar el campo, podemos concluir:

- Cuando la velocidad del cuerpo es mayor que la velocidad de escape, la energía será superior a cero; por tanto, el cuerpo no quedará en ningún caso ligado a campo alguno.

- Cuando la velocidad del cuerpo es menor que la velocidad de escape, dicho cuerpo posee energía negativa y, por tanto, quedará ligado al campo gravitatorio.

Por lo tanto, **cualquier cuerpo con energía negativa realizará una órbita cerrada** (ya sea circular o elíptica). Lo comprobaremos para el caso de una órbita circular.

Supongamos un cuerpo de masa $m << m_T$, que describe una órbita circular a una distancia r del centro terrestre ($r = r_T + h$).

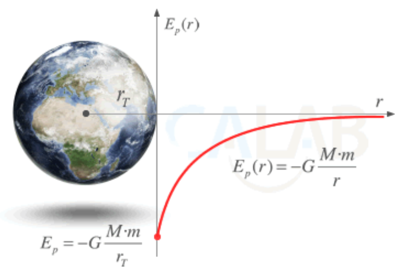
La energía potencial del cuerpo en la órbita será: $Ep = -G\frac{m \cdot m_T}{r}$.

Si la órbita es circular, la fuerza gravitatoria es además centrípeta: $G\frac{m \cdot m_T}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$ y por lo tanto: $Ec = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{m \cdot m_T}{2r}$

Por lo tanto la energía mecánica total, la suma de la energía cinética y potencial, será:

$$E = -G\frac{m \cdot m_T}{2r}$$

Como puede verse, es una energía negativa. Este resultado, obtenido para una órbita circular, es extensible a órbitas elípticas y, en general, a cualquier órbita cerrada.



- Utilicemos la gráfica de la energía potencial en función de r para relacionar la energía con la forma de la órbita.

- Cuando la energía es negativa, el cuerpo está ligado al campo gravitatorio terrestre. Los puntos de corte de las líneas correspondientes a valores negativos de energía con la curva de energía potencial, determinan la distancia máxima que el cuerpo puede separarse de la Tierra. Por lo tanto, cuando la energía es negativa, la órbita es cerrada. Este es el caso de todos los cuerpos del sistema solar, ligados al campo gravitatorio del Sol o de sus planetas.

- Para energías positivas o cero, no existe punto de corte entre la curva de energía potencial y la línea correspondiente al valor de energía por lo que no se establece una órbita cerrada. Si la energía es cero, caso de un cuerpo que procediera del exterior del sistema solar y cuya energía cinética fuese, a cierta distancia, igual en valor absoluto, que la energía potencial, la trayectoria tiene forma parabólica. Para energías positivas, la trayectoria es una hipérbola.

En el sistema solar casi todos los cuerpos describen órbitas elípticas de mayor o menor excentricidad. Los planetas y la mayoría de los satélites tienen excentricidades bajas, de modo que en algunos casos las órbitas son casi circulares. Sin embargo, ciertos asteroides y la mayoría de los cometas tienen excentricidades muy elevadas y sus órbitas son elípticas. Los cometas de periodo largo (centenares de miles o millones de años) describen casi parábolas, pues sus velocidades en el afelio son muy bajas.

7. SATÉLITES ARTIFICIALES

7.1. TIPOS DE ÓRBITAS

Actualmente hay cientos, quizá miles, de satélites artificiales girando en torno a la Tierra, todos ellos lanzados por el ser humano con distintos fines: científicos, informativos, militares, etc. Aunque la densidad del tráfico es grande, es difícil que se produzcan colisiones entre ellos porque sus órbitas están bien definidas de acuerdo con normas internacionalmente establecidas.

Según la altura a la que se encuentren los satélites respecto de la superficie terrestre, sus órbitas se clasificas en **órbitas bajas (LEO), órbitas medias (MEO) y óbitas altas (GEO).**

1. **Órbitas LEO (Low Earth Orbit).** Se encuentran por debajo de los 5000 km, la mayor parte entre los 600 y 2000 km. Los satélites LEO tienen poca cobertura, por esta razón, se requieren muchos satélites de este tipo para obtener una cobertura mundial. Esta saturación de órbitas conlleva una serie de problemas, como el número de antenas terrestres necesario para recibir información, incremento de chatarra espacial, mayor posibilidad de pérdida de satélites descontrolados y posibilidad de caída de satélites a la atmósfera, con el peligro que esto supone. Además, consumen gran cantidad de combustible debido a la alta velocidad a la que se desplazan. Se utilizan para proporcionar datos geológicos, telefonía móvil, etc. Utilizan un ancho de banda entre baja y media.

2. **Órbitas MEO (Medium Earth Orbit).** Se encientran entre los 10000 y los 20000 km. Los satélites MEO tienen mayor cobertura, por lo que necesitan menos antenas de seguimiento. Necesitan también menos combustible para mantenerse en órbita porque se desplazan con una velocidad inferior a la de los satélites LEO. Respecto a la chatarra espacial, presentan los mismos problemas. Se emplean para telecomunicaciones de telefonía y televisión, utilizando banda ancha (Mbps).

3. **Órbitas GEO.** Estos satélites tienen sus órbitas situadas a una altura fija: 35786 km sobre el ecuador. A esta altura la velocidad del satélite coincide con la velocidad angular de la Tierra. Es decir, tardará 24 horas en dar una vuelta en torno a nuestro

planeta, ya que su periodo orbital es igual al periodo de rotación de la Tierra (día sideral). Por esta razón, los satélites que orbitan a esa altura reciben el nombre de **geosíncronos**. Las órbitas síncronas, son circulares, centradas en la Tierra, por lo que su velocidad orbital es constante.

Las órbitas síncronas más importantes son las que se encuentran en el plano ecuatorial, que se llaman **geoestacionarias**. Para un observador estático en la superficie terrestre, un satélite geoestacionario se percibiría como un punto inmóvil en el cielo. Debido a ello, no se necesita un equipo de rastreo, y las antenas se orientan directamente hacia él de forma permanente. Por esta razón, la mayoría de los satélites que giran en torno a la Tierra son geoestacionarios.

Existe una red mundial de satélites meteorológicos geoestacionarios que proporcionan imágenes de la superficie y de la atmósfera terrestre, como por ejemplo el Meteosat, lanzado por la Agencia Espacial Europea.

Una de las ventajas de los satélites geoestacionarios es que son suficientes tres de ellos, colocados a una distancia de 120º el uno del otro para cubrir todo el globo y asegurar un sistema de comunicaciones mundial. Al permanecer quietos entre dos continentes pueden actuar de puente para comunicaciones telefónicas, transmisión de datos, difusión mundial de señales de televisión, etc, utilizando un número muy reducido de antenas.

Inconvenientes: Requieren complicados y pesados dispositivos a bordo para mantenerse en una órbita fija. Al estar a gran altura, se producen retrasos (500 a 600 ms) entre la ida y la vuelta de una señal entre dos estaciones terrestres pasando por el satélite geoestacionario.

Cementerio de satélites: Los satélites cuentan con una vida útil bien definida, ¿qué sucede con los satélites que han dejado de ser operativos? Desde inicios de la década de 1990 se reconoció a la **basura espacial** como un problema real a nivel mundial que exigía una solución. En 1993, las agencias espaciales acordaron dos soluciones: estrellar a los satélites inservibles contra la atmósfera o situarlos en una órbita más alta para su jubilación.

La primera solución podría ser factible, pero exige un cálculo minucioso sobre la posibilidad de desintegración de los restos al caer. Se optó por la segunda solución: habilitar una órbita cementerio, ubicada a una altura aproximada de 300 km por encima de la órbita geoestacionaria. La transferencia a la órbita cementerio desde la geoestacionaria es relativamente fácil: solo se requiere un cambio de velocidad de 11 m/s. En cambio, trasladar satélites LEO y MEO a la órbita cementerio es muy complicado.

En este momento hay más de un centenar de satélites en el cementerio, pero con el paso del tiempo, inevitablemente habrá colisiones en la órbita cementerio, con lo que se originará más basura espacial.