TRABAJO Y ENERGÍA; FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

El problema fundamental de la Dinámica es determinar el tipo de movimiento de un cuerpo a partir de la fuerza que actúa sobre él. Este problema tiene solución en dos casos:

- Cuando las fuerzas que actúan son constantes. Por aplicación de la 2ª ley de la Dinámica podemos conocer la velocidad, la posición y todas las magnitudes del movimiento.
  Como $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{F}\int dt \rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}\int dt$
- Si las fuerzas no son constantes pero son funciones conocidas del tiempo, el cálculo de las magnitudes del movimiento se realiza igual que en el caso anterior, solo que la fuerza no sale de la integral. $\vec{v} = \frac{1}{m}\int \overrightarrow{F(t)}dt$

Si las fuerzas que actúan sobre una partícula no se conocen como función del tiempo sino como función de la posición, es decir F(x,y,z), la integral anterior no se puede resolver, mientras no conozcamos la posición del cuerpo en función del tiempo, que es precisamente lo que queremos conocer. Son fuerzas de este tipo: las fuerzas gravitatorias, las fuerzas electrostáticas y las fuerzas elásticas.

Para determinar el tipo de movimiento que originan dichas fuerzas se introducen los conceptos de trabajo y energía.

1. CONCEPTO DE TRABAJO:

Del trabajo tenemos un concepto intuitivo. Cuando un repartidor de butano sube una bombona a un cuarto piso, dirá que ha realizado un trabajo 4 veces mayor que si la hubiera subido al primero. Si en lugar de subir una bombona, hubiera subido dos, diría que el trabajo es doble. En estas afirmaciones están implícitos los dos elementos fundamentales: la fuerza que se realiza y el desplazamiento que dicha fuerza produce.

Por otro lado, si queremos arrastrar un cuerpo y realizamos una fuerza perpendicular a la superficie de apoyo del cuerpo, el cuerpo no se desplaza y por lo tanto no realizaremos trabajo.

De todo lo anterior se deducen las siguientes consideraciones:

- Las fuerzas son los agentes productores de trabajo.
- Un trabajo mecánico supone siempre un desplazamiento.
- Para que una fuerza realice un trabajo se debe aplicar en la misma dirección en la que pretendemos que se produzca el desplazamiento.
- Puede ocurrir que la dirección de la fuerza no coincida con la dirección del desplazamiento. En este caso habrá trabajo si la fuerza tiene una componente que coincida con la dirección del desplazamiento. Lo que ocurre es que no se aprovecha totalmente la fuerza aplicada.

Para definir matemáticamente el concepto de trabajo vamos a analizar dos tipos de fuerzas distintos. En primer lugar, estudiaremos el trabajo de una fuerza constante y a continuación abordaremos el trabajo realizado por una fuerza variable.

A) TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE

Todos sabemos que cuesta trabajo tirar de un sofá pesado, levantar una pila de libros desde el suelo a un estante, o empujar un coche averiado. Los tres ejemplos concuerdan con el significado cotidiano de trabajo: cualquier actividad que requiere esfuerzo muscular o mental. En física, el trabajo tiene una definición mucho más precisa. Los tres ejemplos mencionados, tienen algo en común: realizamos trabajo ejerciendo una **fuerza** sobre un cuerpo mientras este se mueve de un lugar a otro, es decir, sufre un **desplazamiento.** El trabajo realizado sobre el cuerpo es mayor si la fuerza $\vec{F}$ o el desplazamiento $\vec{s}$ es mayor.

Supongamos una partícula que experimenta un desplazamiento $\Delta\vec{r}$, siguiendo una trayectoria rectilínea, bajo la acción de una fuerza constante $\vec{F}$. El trabajo realizado por la fuerza se define como **el producto escalar de la fuerza aplicada por el desplazamiento que ha experimentado el punto de aplicación de esa fuerza.**

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cos\alpha$$

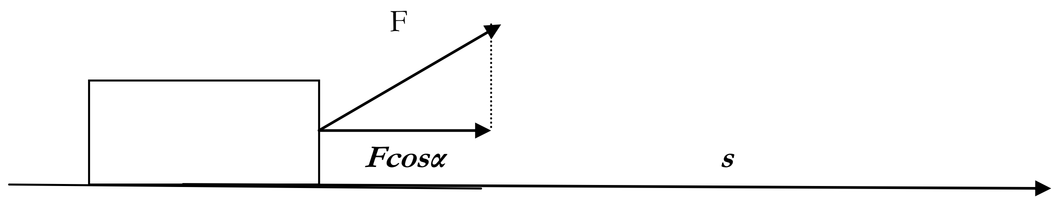
α es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento.

La unidad de trabajo en el S.I. es el julio (J): 1 J es el trabajo realizado por una fuerza de 1 N que actúa sobre un cuerpo desplazándolo 1 m.

De la expresión anterior deducimos que:

- El trabajo es máximo cuando la fuerza y el desplazamiento tienen la misma dirección (cos0)=1
- El trabajo es nulo cuando la fuerza es perpendicular al desplazamiento (cos90=0)
- El trabajo es negativo si la fuerza va total o parcialmente en sentido contrario al desplazamiento. Es el caso del trabajo realizado por la fuerza de rozamiento

Si la fuerza, forma un ángulo α con la dirección del desplazamiento, sólo la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento es efectiva para mover el cuerpo.



En este caso, definimos el trabajo como el producto de la componente de la fuerza en la dirección del movimiento (Fcosα), por el desplazamiento: $W = Fscos\alpha$

El trabajo es una cantidad escalar, calculada a partir de dos vectores, la fuerza y el desplazamiento. El trabajo efectuado por una fuerza puede ser positivo (0<α<90), negativo (90<α<180) o cero (α=90).

Si actúan varias fuerzas sobre el cuerpo, como el **trabajo es una magnitud escalar**, el trabajo total realizado por todas las fuerzas es la suma algebraica de los trabajos realizados por las fuerzas individuales.

Ejemplo.1 (Selectividad 2013)

Un bloque de 5 kg se desliza con velocidad constante por una superficie horizontal rugosa al aplicarle una fuerza de 20 N en una dirección que forma un ángulo de 60º sobre la horizontal. a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque, indique el valor de cada una de ellas y calcule el coeficiente de rozamiento del bloque con la superficie. b) Determine el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando se desplaza 2 m y comente el resultado obtenido.

g = 9,8 m s^{-2}

Ejemplo.2 (Selectividad 2012)

Un cuerpo de 5 kg, inicialmente en reposo, se desliza por un plano inclinado de superficie rugosa que forma un ángulo de 30º con la horizontal, desde una altura de 0,4 m. Al llegar a la base del plano inclinado, el cuerpo continúa deslizándose por una superficie horizontal rugosa del mismo material que el plano inclinado. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo y las superficies es de 0.3.

a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en su descenso por el plano inclinado y durante su movimiento a lo largo de la superficie horizontal. ¿A qué distancia de la base del plano se detiene el cuerpo?

b) Calcule el trabajo que realizan todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo durante su descenso por el plano inclinado.

g = 10 m s^{-2}

Ejempo.3 (Selectividad 2012)

Un bloque de 2 kg se lanza hacia arriba por una rampa rugosa (μ = 0,2), que forma un ángulo de 30º con la horizontal, con una velocidad de 6 m s-1. Tras su ascenso por la rampa, el bloque desciende y llega al punto de partida con una velocidad de 4,2 m s-1.

a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando asciende por la rampa y, en otro esquema, las que actúan cuando desciende e indique el valor de cada fuerza.

b) Calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento en el ascenso del bloque y comente el signo del resultado obtenido.

g = 10 m s^{-2}

B) TRABAJO DE UNA FUERZA VARIABLE

Hasta ahora hemos considerado solo el trabajo realizado por fuerzas constantes. ¿Qué sucede cuando estiramos un muelle? Cuanto más lo estiramos, más fuerza debemos aplicar, así que la fuerza no es constante. Veamos ahora cómo calcular el trabajo en este caso.

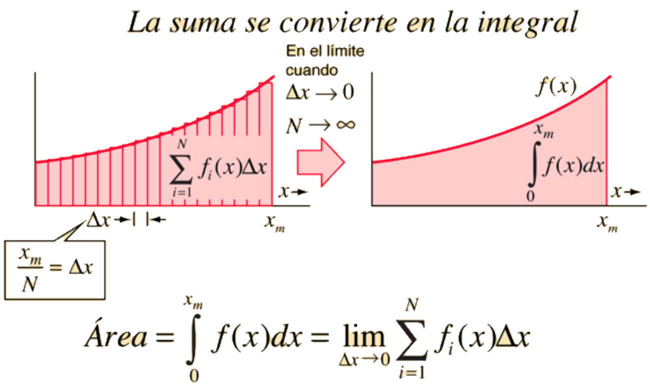
Si la fuerza no es constante a lo largo del desplazamiento o si el punto de aplicación describe una trayectoria cualquiera, dividimos ésta en desplazamientos elementales **dr** tan pequeños, de manera que la fuerza en cada uno de ellos sea prácticamente constante y cada desplazamiento elemental sea prácticamente rectilíneo.

En estas condiciones se llama **trabajo elemental** de una fuerza al producto escalar de esta fuerza por un desplazamiento elemental.

$$dW = \overrightarrow{F_{dr}} \cdot d\vec{r}$$

El trabajo realizado por la fuerza en el desplazamiento total se obtendrá sumando todos estos trabajos elementales. $dW = \overrightarrow{F_1} \cdot d\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{F_2} \cdot d\overrightarrow{r_2} + \cdots$

Si el número de segmentos se hace muy grande y su anchura muy pequeña, la suma se convierte (en el límite) en la integral de F de x_1 a x_2: $W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$ (*2)



Observa que $F_1 dx_1$ es el área de la primera tira vertical de la primera figura y que la integral representa el área bajo la curva entre x_1 y x_2.

En una gráfica de la fuerza en función de la posición, el trabajo total realizado por la fuerza está representado por el área bajo la curva entre las posiciones inicial y final.

La ecuación (*2) puede aplicarse si la fuerza es constante, en cuyo caso puede sacarse de la integral y recuperamos la definición de trabajo del apartado anterior:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = F \int_{x_1}^{x_2} dx = F(x_2 - x_1)$$

Ejemplo.4. Calcula el trabajo necesario para alargar un muelle 15 cm sabiendo que su constante recuperadora vale k=200 N/m. Sol:2,25 J

Ejemplo.5. Calcula el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = 2x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + 3z\vec{k}$ cuando su punto de aplicación se traslada desde el punto A(0,0,0) hasta el B(2,-1,3).

C- POTENCIA

Si es interesante el trabajo realizado por una fuerza, más interesante aun, sobretodo en el aspecto técnico, es considerar la eficacia de esa fuerza en la realización de un trabajo. Una fuerza es tanto más eficaz cuanto menor sea el tiempo empleado en realizar un trabajo determinado. La magnitud que relaciona el trabajo con el tiempo recibe el nombre de potencia, que se define como el trabajo realizado por unidad de tiempo.

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{v_m}$$

En el S.I. la unidad de potencia es el Watio: ($1W = \frac{1J}{1s}$). También se utiliza el kw=1000W. Otra unidad de potencia muy utilizada es el caballo de vapor: 1C-V.=735,5 W

D- TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

La energía que posee un cuerpo se define como la capacidad para realizar un trabajo. Todo fenómeno físico, por naturaleza, consiste en la alteración de la partícula, o del sistema de partículas en que se realiza. Para que se produzca esa alteración es necesario la realización de un trabajo, ya sea por las fuerzas internas del sistema (la explosión de una granada), o por las fuerzas externas producidas por otros cuerpos.

Recibe el nombre de **energía cinética** o de movimiento, la capacidad que posee un cuerpo de realizar un trabajo en función de su estado de movimiento.

Ya sabemos que si sobre un cuerpo actúa una fuerza, éste experimenta un cambio en su velocidad. Consideremos una partícula de masa *m* que se mueve a lo largo del eje X bajo la acción de una fuerza neta constante, de magnitud *F*, dirigida en el sentido positivo del eje X, cambiando su rapidez de v_1 a v_2, mientras la partícula se desplaza una distancia s. Tendremos:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a\Delta r \rightarrow a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta r}$$

Si multiplicamos ambos miembros por la masa *m* y sustituimos *ma* por la fuerza *F* :

$$F = ma = m \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta r} \quad \rightarrow F\Delta r = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (*)$$

El producto FΔr es el trabajo realizado por la fuerza neta, es decir, el trabajo total efectuado por todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. La cantidad $\frac{1}{2}mv^2$, es la energía cinética de la partícula: $E_c = \frac{1}{2}mv_2^2$

Al igual que el trabajo, la energía cinética es una magnitud escalar, sólo depende de la masa y de la rapidez de la partícula, no de su dirección de movimiento.

La ecuación (*), nos dice que **el trabajo efectuado por la fuerza neta sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de ésta.** Resultado que se conoce como el **teorema del trabajo y la energía o teorema de las fuerzas vivas.**

Significado físico de la energía cinética.

Según todo lo anterior, la **energía cinética de una partícula es igual al trabajo total efectuado para acelerarla desde el reposo hasta su rapidez actual** o lo que es lo mismo: la energía cinética de una partícula es igual al trabajo real que se debe efectuar sobre la partícula para detenerla desde su velocidad inicial *v*.

Ejemplo 6: Se dispara una bala de 5 g contra una pared con una velocidad de 200 m/s. La bala penetra en la pared 5 cm. Calcula la resistencia que ha ofrecido dicha pared.

Ejemplo 7: Sobre un cuerpo de 15 kg, situado en una superficie horizontal, actúa horizontalmente una fuerza de 40 N. El cuerpo se ha desplazado 21 m en un minuto con aceleración constante. Calcula: a) El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie. b) La energía cinética del cuerpo al final del recorrido. c) La potencia media desarrollada.

D. CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES: SUPERFICIES EQUIESCALARES Y LÍNEAS DE CAMPO.

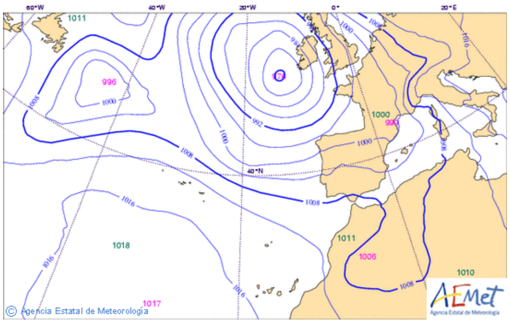
D.1. Campos escalares

Si colocamos un termómetro muy sensible en distintos puntos de una habitación en un día de invierno, veremos que no marca lo mismo en todos los puntos. La temperatura sería mayor en aquellos puntos más próximos a los radiadores de calefacción, mientras que sería inferior en puntos más alejados, donde hubiera corrientes de aire, junta a la puerta…, etc. A cada punto corresponde una temperatura.

Se dice que existe un **campo escalar** cuando una magnitud escalar (presión, temperatura, etc) tiene un valor determinado en cada punto del espacio. La magnitud escalar será por lo tanto, una **función de la posición o coordenadas del punto.** Si llamamos U a dicha magnitud, se tiene que U=f(f)=f(x,y,z).

Para representar gráficamente un campo escalar se utilizan **las superficies de nivel o equiescalares.** Una superficie de nivel es el lugar geométrico de los puntos en los que la magnitud escalar tiene el mismo valor. Las superficies de nivel reciben distintos nombres según sea el escalar:

- **Isotermas** si el escalar es la temperatura.
- **Isobaras** si el escalar es la presión
- **Superficies equipotenciales** si el escalar es un potencial.



En un campo escalar la función característica de dicho campo variará cuando se pasa de una superficie de nivel a la siguiente, y esta variación será tanto más rápida cuanto más corto sea el camino seguido. **La máxima rapidez de variación se produce cuando el camino**

seguido sea la perpendicular común a dos superficies de nivel consecutivas.

Matemáticamente**, la rapidez de variación** de la magnitud escalar viene dada por la derivada:

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta r} = \frac{dU}{dr}$$

Esta derivada recibe el nombre de **gradiente de la función escalar**. Simbólicamente puede representarse de tres formas: $Grad\ U = \nabla U = \frac{dU}{dr}$

AMPLIACIÓN

Como la función U depende de x,y,z, al diferenciar esta función se obtiene:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad \rightarrow \quad dU = \nabla U \cdot dr = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k})$$

De la expresión anterior se deduce que el **gradiente de un escalar** es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales del escalar, cuya dirección es normal a las superficies de nivel contiguas y cuyo sentido coincide con el sentido de recorrido.

Físicamente el gradiente nos indica cómo varía un escalar con la distancia.

D.2. Campos vectoriales. Circulación de un vector.

Se dice que en una región del espacio existe un campo vectorial cuando en cada punto del espacio existe un vector V=f(x,y,z).

Un campo vectorial importante es el **campo de fuerzas**: En cada punto del espacio está definida una fuerza. El campo gravitatorio es un campo de fuerzas porque si colocamos un cuerpo en cualquier punto del espacio que rodea a la Tierra actúa sobre él una fuerza peso que tiende a llevarlo hacia el suelo en dirección vertical. El campo eléctrico, como veremos, es también un campo de fuerzas.

La existencia de un campo de fuerzas se explica admitiendo que el espacio se ha perturbado de alguna manera, adquiriendo propiedades que antes no tenía. Un campo vectorial se representa por las **líneas de campo**. La línea de campo en un punto es tangente al vector campo en dicho punto. Si el campo es de fuerzas, las líneas de campo se llaman líneas de fuerza.

Propiedades de las líneas de campo

- Su sentido de recorrido coincide con el sentido del vector campo.
- Dos líneas de campo no pueden cortarse nunca, a no ser en un punto donde el campo sea nulo.
- Las líneas de campo pueden ser cerradas (campo magnético) o abiertas (campos gravitatorio y eléctrico).

- Si el campo es uniforme las líneas de campo son rectas paralelas.
- En el caso particular de un campo de fuerzas, al abandonar en él una partícula adecuada, ésta se moverá bajo la acción del campo siguiendo una línea de campo.

Por tanto, **las líneas de campo son las trayectorias que sigue una partícula abandonada en reposo en el interior de un campo.**

Circulación de un vector: Se llama circulación de un vector, a lo largo de una línea entre dos puntos A y B, a la integral del producto escalar del vector campo por un desplazamiento elemental a lo largo de la línea:

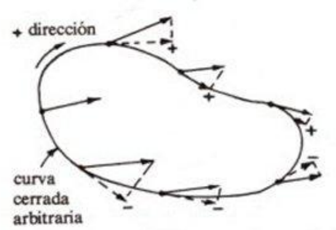


Fig. 1-5. La circulación de un campo vectorial es el producto de la componente tangencial media del vector (con una orientación sistemática de las tangentes) por la circunferencia del lazo.

$$C = \int_A^B V \cdot dr$$

Si el campo es de fuerzas, la circulación coincide con el trabajo.

E. CAMPOS CONSERVATIVOS

Un campo es conservativo cuando la circulación a lo largo de una línea cerrada es cero.

$$C = \oint V \cdot dr$$

Como consecuencia de lo anterior, un campo es conservativo cuando la circulación entre dos puntos solo depende de la posición de dichos puntos y es independiente del camino que se haya seguido.

Si el campo vectorial es de fuerzas, la **fuerza es conservativa** cuando el trabajo realizado a lo largo de una línea cerrada es cero. O también, cuando el trabajo realizado por la fuerza para trasladar un cuerpo entre dos puntos, solo depende de la posición de los puntos y es independiente de la trayectoria.

E.1. El peso de un cuerpo es una fuerza conservativa.

Consideremos un cuerpo de masa *m* que se mueve a lo largo del eje y. Sobre el actúa el peso *mg*, que suponemos constante por permanecer el cuerpo cerca de la superficie terrestre. Calculemos el trabajo efectuado por la fuerza peso para desplazar a un cuerpo desde una altura y_1 a otra y_2, de forma que $y_1 > y_2$ (un cuerpo que cae desde y_1 hasta y_2.

$$W = mg(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2$$

Esta expresión muestra que podemos expresar el trabajo de la fuerza peso en términos de los valores de la cantidad *mgy* al principio y al final del desplazamiento y por lo tanto no depende de la trayectoria elegida. Esta cantidad, es la **energía potencial gravitatoria** (E_p).

Con lo anterior hemos demostrado que el peso es una fuerza conservativa y el campo gravitatorio, un campo conservativo.

E.2. La fuerza recuperadora de un muelle es conservativa.

Si queremos alargar un muelle desde un punto A hasta un punto B, habrá que realizar un trabajo para vencer la resistencia de la fuerza recuperadora. Este trabajo será:

$$W_{A,B} = \int_A^B kxdx = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2$$

De nuevo hemos podido expresar el trabajo realizado contra la fuerza restauradora en términos los valores que en dos puntos toma la cantidad $\frac{1}{2}kx^2$. Esta es la expresión de la energía potencial elástica.

Si desde el punto B dejamos libre el muelle, éste vuelve a su posición inicial y el trabajo realizado por la fuerza restauradora será $-\frac{1}{2}kx^2$.

En general, toda fuerza constante (en módulo, dirección y sentido) es una fuerza conservativa.

F. ENERGÍA POTENCIAL

La energía potencial es una magnitud característica de las fuerzas conservativas.

La energía potencial es la energía asociada a la posición de un sistema, no a su movimiento. Como ejemplos están la energía potencial gravitatoria (de un cuerpo sobre el que actúa la gravedad terrestre) y la energía potencial elástica (almacenada en un resorte estirado o comprimido). Veamos la primera.

F.1. Energía potencial gravitatoria.

Cuando una persona salta desde un trampolín a una piscina, llega al agua con una velocidad, y por tanto una energía cinética considerable. ¿De dónde proviene esa energía?. Igualmente, si levantamos un martillo, al dejarlo caer, éste es capaz de realizar un trabajo. En ambos casos, parece como si en los puntos más altos la energía se almacenara en alguna otra forma, relacionada con su altura sobre el suelo, y se reconvirtiera en energía cinética al ir hacia el punto más bajo. En cualquier caso, ambos ejemplos, apuntan a la idea de una **energía asociada a la posición de los cuerpos en un sistema.** Esta energía es una medida del **potencial o posibilidad de efectuar un trabajo**. Por ello, la **energía asociada a la posición se llama energía potencial.**

Por lo tanto $W = E_{p1} - E_{p2} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$

El signo menos es esencial, cuando el cuerpo sube, el trabajo debe ser realizado por una fuerza externa y la energía potencial aumenta. Si el cuerpo baja, la gravedad realiza un trabajo positivo y la energía potencial disminuye.

Un punto importante referido a la energía potencial gravitatoria es que no importa qué altura escojamos como y=0, el origen de energía potencial. Si desplazamos el origen de y, los valores y_1 e y_2 cambiarán, pero no lo hará su diferencia. Por consiguiente aunque E_{p1} y E_{p2} dependen de dónde coloquemos el origen, la diferencia ΔE_p es independiente. La cantidad físicamente significativa no es el valor de la energía potencial en un cierto punto, sino la diferencia de energía potencial entre dos puntos. Así podemos definir la energía potencial como cero en cualquier punto sin cambiar la física de la situación.

El resultado anterior es general para toda fuerza conservativa: **El trabajo realizado por una fuerza conservativa que actúa sobre un cuerpo, es igual a la disminución de su energía potencial. Esto se conoce como el teorema de la energía potencial.**

Conviene tener en cuenta las diferencias entre este teorema y el teorema de las fuerzas vivas.

- El teorema de la energía potencial solo es válido para fuerzas conservativas. En cambio el teorema de la energía cinética es válido para todo tipo de fuerzas, conservativas y no conservativas.
- Para aplicar el teorema de la energía potencial, se resta a la energía potencial inicial, la final. Para aplicar el teorema de las fuerzas vivas, se resta a la energía cinética final, la inicial.

Una consecuencia de lo anterior es el teorema de conservación de la energía mecánica.

Conservación de la energía mecánica

Definimos la energía mecánica de un cuerpo, como la suma de sus energías cinética y potencial: $E_m = E_c + E_p$

Consideremos el mismo cuerpo del apartado anterior sobre el que solo actúa la fuerza gravitatoria (su peso). Para entendernos, **no actúa ninguna fuerza de rozamiento.**

a) El teorema de las fuerzas vivas, dice que el trabajo total efectuado sobre el cuerpo, es igual a la variación de su energía cinética. $W_T = \Delta E_c$
b) Si sólo actúa el peso, además según el apartado anterior: $W_T = -\Delta E_p$

Uniendo ambos resultados, en el caso de que sólo actúe la fuerza del peso, tendremos: $\Delta E_c = -\Delta E_p \rightarrow \ E_{c2} - E_{c1} = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right) \ \rightarrow \ E_{c2} + E_{p2} = E_{c1} + E_{p1}$

Por lo tanto: $E_{m2} = E_{m1}$. En ausencia de rozamiento, **la energía mecánica de un cuerpo se mantiene constante.**

Efecto de otras fuerzas: Si además de su peso actúan otras fuerzas sobre el cuerpo, el trabajo total será el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria más el trabajo realizado por las otras fuerzas: $W_T = W_g + W_{otras}$

Sabemos que $W_T = \Delta Ec$ y $W_g = -\Delta E_p$, por lo tanto: $\Delta E_c = -\Delta E_p + W_{otras}$. Reordenando términos igual que antes obtendríamos: $E_{m1} + W_{otras} = E_{m2}$

El significado de la ecuación anterior es que **el trabajo realizado por todas las fuerzas distintas de la gravitatoria es igual al cambio en la energía mecánica total del sistema.** Si ese trabajo es positivo, la energía mecánica aumenta, si por el contrario es negativo (como ocurre con el trabajo de rozamiento), la energía mecánica disminuye.

- En el caso de que haya rozamiento, la energía mecánica no se conserva. **El trabajo realizado por una fuerza no conservativa, es igual a la variación de su energía mecánica.**
- La energía mecánica solo se modifica por la acción de fuerzas no conservativas.
- El trabajo para vencer el rozamiento es igual a la disminución de la energía mecánica.

F.2. Energía potencial elástica.

Supongamos que lanzamos un cuerpo hacia un resorte. Si no hay fricción, el resorte "rebota" y el cuerpo se aleja con la rapidez original en sentido contrario. ¿Qué ha ocurrido? Durante la interacción con el resorte, la energía cinética del cuerpo se almacenó en la deformación elástica del muelle. Describimos el proceso de guardar energía en un cuerpo deformable, como un resorte, en términos de la **energía potencial elástica.** Un cuerpo es elástico si recupera su forma y tamaño originales después de deformarse.

Procederemos igual que en el caso gravitatorio y obtendremos la relación entre el trabajo y la energía potencial elástica.

Para estirar un resorte ideal una distancia x, sabemos que debemos ejercer una fuerza $F = kx$, donde k es la constante elástica del muelle. Calculemos el trabajo realizado por dicha fuerza al estirar el resorte desde una longitud x_1 a otra x_2. Recuerda que la fuerza elástica no es constante y por lo tanto no podemos utilizar la expresión $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Si lo calculamos a partir del área delimitada por la gráfica al representar la fuerza frente al estiramiento: $W_{el} = \frac{1}{2}Kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$ (trabajo realizado **sobre** el resorte).

El trabajo realizado por el resorte tendrá signo contrario. Por lo tanto, igual que en el caso gravitatorio, podemos expresar el trabajo del resorte en términos de una cantidad dada al principio y al final del desplazamiento (estiramiento). Esta cantidad es la energía potencial elástica: $E_{pel} = \frac{1}{2}kx^2$

$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = -\Delta E_{pel}$ (trabajo realizado **por** el resorte)

Si el resorte se estira, el trabajo efectuado por él es negativo (una fuerza externa está haciendo trabajo sobre el resorte) y su energía potencial aumenta. Si por el contrario, un resorte estirado se comprime, el trabajo positivo es realizado por el resorte y su energía potencial disminuye.

Una diferencia fundamental entre la energía potencial gravitatoria y la elástica, es que mientras en el primer cao podemos escoger el origen de energía donde queramos, en el caso del muelle $x=0$ debe ser la posición de equilibrio del resorte.

Situaciones con energía potencial gravitatoria y elástica

Recordemos la expresión: $E_{m1} + W_{otras} = E_{m2}$. Podemos seguir utilizándola teniendo en cuenta que en la energía mecánica, el término de energía potencial debe ser la suma de las dos energías potenciales que hay: la gravitatoria y la elástica. Por lo tanto:

$$E_{c1} + E_{pg1} + E_{pel1} + W_{otras} = E_{c2} + E_{pg2} + E_{pel2}$$

La expresión anterior indica que **el trabajo realizado por todas las fuerzas aparte de la gravitatoria o la elástica es igual al cambio en la energía mecánica total , la suma de la energía cinética y la potencial, siendo la energía potencial, la suma de las energías potenciales gravitatoria y elástica.**

G. RELACIÓN FUERZA – ENERGÍA POTENCIAL

En los dos casos de fuerza conservativa que hemos estudiado, hemos obtenido la expresión de la energía potencial a partir del trabajo de la fuerza gravitatoria o elástica. ¿Se puede determinar la fuerza a partir de la energía potencial? La respuesta es afirmativa.

Consideremos un desplazamiento rectilíneo sobre el eje X. Si la fuerza es conservativa sabemos que $W = -\Delta Ep$.

Si tenemos en cuenta un desplazamiento Δx pequeño: $F_x(x)\Delta x = -\Delta Ep$ donde $F_x(x)$, es la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento y en general (como ocurre en el caso de la fuerza elástica), dependerá de la posición.

De la expresión anterior obtenemos: $F_x(x) = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x}$

En el límite en el que $\Delta x \to 0$, la expresión anterior se transforma en: $F_x(x) = -\frac{dE_p}{dx}$ que nos da la expresión de la fuerza a partir de la energía potencial, en una dimensión.

En tres dimensiones, podemos extender el análisis a una partícula que se puede mover en las tres direcciones bajo la acción de una fuerza conservativa de componentes F_x, F_y, F_z, y cada una de estas componentes puede ser función de x, y, z.

Igual que hemos obtenido la componente x de la fuerza como $F_x = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x}$, las otras dos componentes se obtendrán: $F_y = -\frac{\Delta E_p}{\Delta y}$, $F_z = -\frac{\Delta E_p}{\Delta z}$ que en el límite cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0, \Delta z \to 0$ se transforman en: $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$ que se puede escribir como una única expresión vectorial de la forma: $\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)$ y de forma compacta: $\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathrm{E_p}$ que se lee, la fuerza es el gradiente con signo negativo de la función energía potencial.

H. FLUJO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE

Se entiende por flujo de líneas de campo a través de una superficie, al número de líneas de campo que la atraviesan. El flujo es directamente proporcional a la intensidad del campo E, al valor de la superficie S y dependerá del ángulo α que formen las líneas del campo con la normal a la superficie. El flujo será máximo si $\alpha=0$ y nulo si $\alpha=90$.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos escribir la siguiente expresión para calcular el flujo, que se representa con la letra Φ: $\Phi = E \cdot S \cdot cos\alpha$

Esta ecuación se puede poner como producto escalar de dos vectores si representamos la superficie mediante un vector, llamado **vector superficie**, que se define como un vector cuya dirección es normal a la superficie, cuyo módulo coincide con el área o valor de la superficie y cuyo sentido viene dado por la parte convexa de la superficie.

Teniendo en cuenta esta definición de vector superficie, podemos escribir el flujo como:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

Si el campo no es uniforme, la intensidad en cada punto de la superficie no es la misma. Para hallar el flujo en este caso dividimos la superficie en elementos dS, de manera que en cada elemento de superficie el campo sea prácticamente uniforme. Para cada flujo elemental, se puede aplicar la definición anterior: $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$, y el flujo total a través de toda la superficie vendrá dado por la integral: $\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$